ESERCITAZIONE 11/02

3. $$\sum_{n\geq 2} \frac{(\log n)^{\alpha n}}{n^3}$$ Come si comporta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

$$a_n = \frac{(\log n)^{\alpha n}}{n^3}$$ è a termini >0, quindi posso usare i criteri per serie a segno costante.

L'n a esponente indica di provare il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(\log(n))^{\alpha n}}{n^3}} = \left(\frac{(\log(n))^{\alpha n}}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(\log(n))^{\alpha}}{(n^3)^{1/n}} =$$

$$= \frac{(\log(n))^{\alpha}}{\sqrt[n]{n^3}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{\sqrt[n]{n^3}}$$ $\sqrt[n]{n^3} \rightarrow 1$

$\left(\sqrt[n]{p(n)} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n \to +\infty \right)$

polinomio

Usando il criterio "rapporto $\rightarrow$ radice"

se $b_n = n^3$, allora $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} =$$

$= 1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3} \to 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{b_n} \longrightarrow 1$

$\sqrt[n]{n^3}$ //

A cosa tende $(\log n)^\alpha$? Dipende da α.

$\log n \to +\infty$, quindi :

- se $\alpha>0$, $(\log n)^\alpha \longrightarrow +\infty$
- se $\alpha<0$, $(\log n)^\alpha \longrightarrow 0$
- se $\alpha=0$, $(\log n)^\alpha = 1 \quad \forall n \geq 2$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

$\rightarrow$ la serie converge

???

Esaminiamo a parte il caso $\alpha=0$ (il criterio non ci dice niente visto che $l=1$)

Se $\alpha=0$ la serie diventa $\sum_{n\geq 2} \frac{(\log n)^0}{n^3} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3}$

armonica generalizzata con esponente >1

$\Rightarrow$ converge.

Quindi: la serie converge se $\alpha \leq 0$

e diverge a $+\infty$ se $\alpha > 0$.

(risposta (d))

Esercizio 5: $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{n^2}}{n^{3n}}$.

<u>Oss</u>: e' una serie a termini positivi.

Di nuovo, gli n all'esponente suggeriscono di usare il criterio della radice.

Se $a_n = \frac{e^{n^2}}{n^{3n}}$, allora $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{e^{n^2}}{n^{3n}}\right)^{1/n} = \frac{e^{\cancel{n^2}/\cancel{n}}}{n^{3\cancel{n}/\cancel{n}}}$

$= \frac{e^n}{n^3} \longrightarrow +\infty = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Quindi per il criterio della radice, la serie diverge a $+\infty$

(l'esponenziale "vince" su qualsiasi potenza n^α)

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

<u>Oss</u>: se $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow +\infty$, a maggior ragione $a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n \longrightarrow$ "$(+\infty)^{+\infty}$" $= +\infty$ quindi per forza la serie $\sum_n a_n$ diverge

(risposta (d)).

Esercizio 10

$$\sum_{n\geq 1} \underbrace{\sqrt{n^4-n^2+n}\,\left(2+\cos(n^2)\right)\sin\frac{1}{n^3}}_{\text{" } a_n}$$

Per prima cosa, si ha

$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, perchè $\sqrt{\cdot} \geq 0$

$-1 \leq \cos(n^2) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2+\cos(n^2) \leq 3$

$\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \geq 0$ perchè $0 \leq \frac{1}{n^3} \leq 1$

È bene farsi un'idea di "come si comporta" la successione a_n quando $n \to +\infty$, usando Taylor, tipicamente.

Il termine $(2+\cos(n^2))$ e' limitato tra 1 e 3, e alla fine men ne sbarazzerò usando il confronto. Al momento lo ignoriamo.

$$\sqrt{n^4-n^2+n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \sqrt{n^4\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= n^2\cdot\boxed{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$\swarrow$ per $n \to +\infty$

1

$$\sin(t) = t + o(t) \quad \text{per } t \to 0$$

$$t = \frac{1}{n^3} \rightsquigarrow \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Quindi

$$= n^2 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \cdot \left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}.$$

Questo suggerisce di fare confronto asintotico con

$b_n = \frac{1}{n}$. $\left(\text{sappiamo che } \sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4-n^2+n}\cdot\left(2+\cos(n^2)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\cos(n^2)\right)\cdot\left(\cancel{\frac{1}{n}} + o\left(\cancel{\frac{1}{n}}\right)\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+o(1)\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(2+\cos(n^2)\right)}_{\to ??}\cdot\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}_{\to 1}.$$

(non ha limite).

Idea: $1 \leq 2+\cos(n^2)$, quindi se verifico

che $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n^4-n^2+n}\cdot 1\cdot \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ diverge, per confronto "semplice" poi segue che anche

$\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

e ora il cofronto asintotico funzione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4-n^2+n}\cdot \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conti fatti} \\ \text{sopra}}}{=} \lim_{n\to+\infty} (1+o(1))\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = $$

$$= 1$$

Quindi per C.A. $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^4-n^2+n}\cdot \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

e per confronto "semplice", anche $\sum_{n\geq} a_n = +\infty$

(risposta (a)).

Esercizio 6: $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{\log(13+\sin(n))}{n}}_{= a_n}$

$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \implies 12 \leq 13+\sin(n) \leq 14$

Quindi $0 \leq \log(12) \leq \log(13+\sin(n)) \leq \log(14)$

quindi la serie e' a termini positivi.

Noto che $a_n \geq \frac{\log(12)}{n}$, quindi per confronto,

visto che $\sum_{n\geq 1} \frac{\log(12)}{n} = \log(12) \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$

Segue che $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$. (risposta (d)).

<u>Esercizio 1</u>. $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}}}_{a_n}$.

a_n si scrive come somma di $b_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$, $c_n = \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}}$.

$$\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}} = \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}}$$

<u>Se</u> esistono $\sum_{n\geq 1} b_n$ e $\sum_{n\geq 1} c_n$, e la somma

$\sum_{n\geq 1} b_n + \sum_{n\geq 1} c_n$ ha senso (non è $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$)

allora $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} b_n + \sum_{n\geq 1} c_n$.

Ora, $\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ serie a segni alterni, e converge per il criterio di Leibnitz, perché la successione

$d_n = 1/n^{3/2}$ è ≥ 0, debolm. decrescente, e $d_n \to 0$ per $n \to +\infty$

e $\sum_{n\geq 1} c_n = \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}} = \sum_{n\geq 1} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{n\cancel{\sqrt{n}}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$

Quindi $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} b_n + \sum_{n\geq 1} c_n = +\infty$.

un qualche numero in $\mathbb{R}$ $\quad +\infty$

(risposta (b)).

<u>Attenzione</u>: se $\sum_{n\geq 1} b_n$ e/o $\sum_{n\geq 1} c_n$ non esistono, non potete concludere niente riguardo a $\sum_{n\geq 1} a_n$!

<u>Esempio</u>: $b_n = (-1)^n$, $c_n = (-1)^{n+1}$, allora

$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n$ è indeterminata.

$\sum_{n\geq 1} c_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} = -\sum_{n\geq 1} (-1)^n$ è anche indeterminata.

$a_n = b_n + c_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

e $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, $=0$.

Esercizio 7 : $\sum_n \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-3n} \log^3 n}{(2n+1)}$.

$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) =$ $n=0$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$n=1$ $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

$\parallel$

$(-1)^n$ $n=2$ $\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\vdots$

Quindi la serie è $\sum_n (-1)^n \frac{e^{-3n} \log^3 n}{(2n+1)}$

Quindi è a segni alterni.

Se chiamo $a_n = \frac{e^{-3n} \log^3 n}{(2n+1)}$.

$a_n \geq 0$, e se controllassi che è definitivam. decrescente e $a_n \to 0$, potrei applicare Leibnitz.

Questo mi farebbe concludere che la serie converge, ma non saprei se converge assolutamente o meno.

Quindi è meglio controllare prima la convergenza assoluta:

$$\sum_n \left| \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) e^{-3n} \log^3 n}{(2n+1)} \right| = \sum_n \frac{e^{-3n} \log^3 n}{(2n+1)}$$

$$= \sum_n \frac{\log^3 n}{e^{3n}(2n+1)}$$

Il polinomio $2n+1$ "compensa già" $(\log n)^3$ a numeratore, e rimane $\frac{1}{e^{3n}} = \left(\frac{1}{e^3}\right)^n$.

Facciamo confronto asintotico con $b_n = \left(\frac{1}{e^3}\right)^n$

(Sappiamo che $\sum_n b_n = \sum_n \left(\frac{1}{e^3}\right)^n$ converge, perché è geometrica di ragione $\frac{1}{e^3} < 1$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log^3 n}{\cancel{e^{3n}}(2n+1)}}{\frac{1}{\cancel{e^{3n}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log^3 n}{(2n+1)} = 0$$

(quindi per $n >> 0$ abbiamo $\frac{\frac{\log^3 n}{e^{3n}(2n+1)}}{\frac{1}{e^{3n}}} < 1$

$\Rightarrow \frac{\log^3 n}{e^{3n}(2n+1)} < \frac{1}{e^{3n}}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{e^{3n}}$ converge)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\log^3 n}{e^{3n}(2n+1)} \text{ converge.}$$

Quindi la mia serie originale converge assolutam.
(risposta (c)).

Esercizio 9.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{5n+2\sin(n)}$$

$$\cos(n\pi) = \begin{array}{ll} n=0 & \cos(0)=1 \\ n=1 & \cos(+\pi)=-1 \\ n=2 & \cos(2\pi)=1 \\ \vdots & \end{array} = (-1)^n$$

$$\sum_{n\geq 1} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{5n+2\sin(n)}}_{a_n}$$

segni alterni?

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$$0 \leq 5n-2 \leq 5n+2\sin(n) \leq 5n+2$$

ok, è a segni alterni.

Conviene partire dalla convergenza assoluta:

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{5n+2\sin(n)}$$

Visto che $5n-2 \le 5n+2\sin(n) \le 5n+2$

$$\Rightarrow \frac{1}{5n+2} \le \frac{1}{5n+2\sin(n)} \le \frac{1}{5n-2}$$

e visto che $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{5n+2} = +\infty$, per confronto

anche $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{5n+2\sin(n)} = +\infty$.

confronto asintot. con $\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{5n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5n+2} = \frac{1}{5}$$

Quindi la serie non converge assolutamente.

Converge "semplicemente"?

Proviamo a usare Leibnitz con $b_n = \dfrac{1}{5n+2\sin(n)}$

- $b_n \ge 0$ ✓
- definitivamente decrescente
- $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ ← vero, usare carabinieri

Succede se e solo se $c_n = 5n + 2\sin(n)$

è definitivamente crescente.

Posto $f(x) = 5x + 2\sin(x)$, vediamo che

$f(x)$ è crescente per $x>0$.

Infatti $f'(x) = 5 + 2\cos(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi anche $5n + 2\sin(n)$ è crescente,

e la serie iniziale converge per Leibniz.

(risposta (c)).

Esercizio 2 : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n-(\log n)^2}$

$a_n = \dfrac{1}{n-(\log n)^2}$. È definitivamente ≥ 0

$$\left(\text{perché } \lim_{n\to+\infty} n-(\log n)^2 = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \underbrace{\frac{(\log(n))^2}{n}}_{\to 0}\right) = +\infty \right)$$

Idea: a denominatore "quello che conta è n"

$\rightarrow$ facciamo confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n-(\log n)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{(\log(n))^2}{n}}_{\to 0}} = 1.$$

Quindi per C.A., la serie si comporta

come $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, che diverge a $+\infty$ (risposta (c)).

Esercizio 8. $\sum_{n\geq 2} \underbrace{\frac{1}{(\log n)^{2\log n}}}_{a_n}$

è a termini ≥ 0.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\log n)^{2\log(n)}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Condizione nec. ok.

(ad esempio $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\log(n)} = +\infty$, infatti

$\log(n) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log(n)}$

e $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty \implies$ per confronto

$\sum_n \frac{1}{\log(n)} = +\infty$)

$$(\log n)^{2\log(n)} = (\log(n))^{\log(n^2)}$$

$\log(n) \geq e$ per n abbastanza grande (definitivamente) quindi $\quad (\log(n))^{\log(n^2)} \geqslant e^{\log(n^2)} = n^2$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{(\log(n))^{\log(n^2)}} \leq \frac{1}{n^2}$$

Quindi per confronto con $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, che converge,

concludiamo che $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

(quindi converge assolutam., visto che è a termini ≥ 0).

(risposta (c)).