Analisi in più (2) variabili

Finora

- insieme $\subset \mathbb{R}$
- funzioni : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - ↳ limiti di funzioni : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - ↳ calcolo differenziale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- teoria dell'integrazione per funzioni di una variabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- successioni
- serie numeriche

Ultima parte del corso → lavorare con più variabili $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^2)$

- ↳ insiemi nel piano (nello spazio)
- ↳ descrivere delle curve 
- ↳ studiare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
  - ↳ limite
  - ↳ continuità
  - ↳ derivate (?) → in più variabili
  - ↳ studio di funzioni (max, min)

Analisi finora

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$

$A \subset \mathbb{R}$

$f(x) \quad \underline{x \in \mathbb{R}}$

Analisi d'ora in poi

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\uparrow$

$\mathbb{R}^2$

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x)$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Ripasso : STRUTTURA EUCLIDEA di $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale

- ↳ somma
- ↳ prodotto per un numero
- ↳ combinazione lineare
- ↳ indipendenza lineare
- ↳ base
- ↳ sottospazi

$x \in \mathbb{R}^n \to \underbrace{x}_{\text{vettore}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\boxed{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2}$ $\quad$ $\boxed{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3}$

~~NOTAZIONI~~

$\mathbb{R}^2 \to$ piano $\qquad \mathbb{R}^3 \to$ spazio

Somma di 2 vettori : $x = (x_1, \dots, x_n)$
$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

PRODOTTO per un NUMERO $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Struttura?

PRODOTTO SCALARE → operazione che ha come input 2 vettori
$x = (x_1, \dots, x_n)$
$y = (y_1, \dots, y_n)$
e come risultato un numero

$$\langle x, y \rangle = \underbrace{x \cdot y}_{\text{fisica}} = (x, y)$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

es $\mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

NORMA : operazione che ha come input 1 vettore e come risultato un numero ≥ 0

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\|x\| = \underbrace{|x|}_{x \in \mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}_{\text{NORMA di } x}$$

lunghezza del vettore x

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2)$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ = lunghezza del vettore x

DISTANZA : "operazione" che ha come input due vettori e come risultato un numero ≥ 0

$$dist(x,y) = d(x,y) = \|x-y\|$$ distanza tra x e y

$x \in \mathbb{R}^n, \; y \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

$$x-y = (x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_n-y_n)$$

$x + (-1)y$

$\mathbb{R}^n$

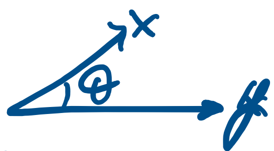
$$\langle \, , \rangle \xrightarrow{\text{induce}} \| \cdot \| \xrightarrow{\text{induce}} d$$

$\langle \, , \rangle$: serve a misurare gli angoli → geometricamente

$\| \cdot \|$: lunghezza di un vettore

d: misura la distanza tra due elementi

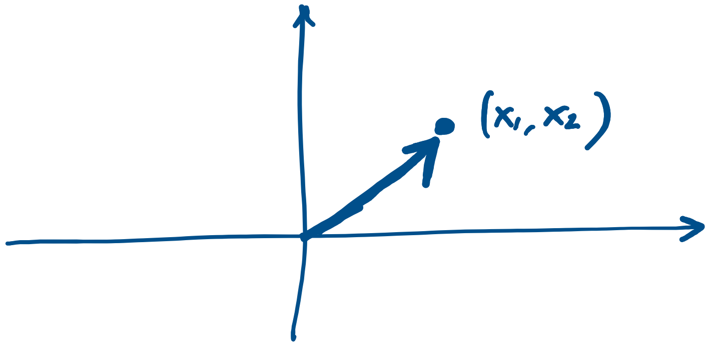
$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$$



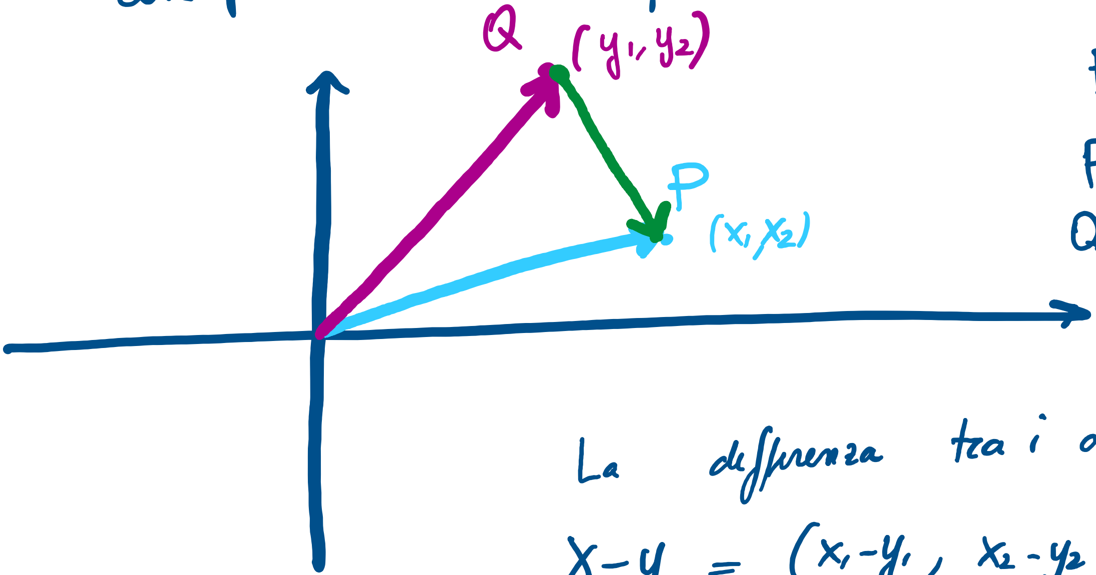
se $x, y \neq 0$ $\quad \langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$

__Digressione__ $(\mathbb{R}^2)$

$x \in \mathbb{R}^2 \qquad x = (x_1, x_2)$ punti o vettori?



In $\mathbb{R}^2$ se scrivo (x_1, x_2) questo rappresenta sia il punto che il vettore applicato nell'origine con punta della freccia in (x_1, x_2)



P e Q

$P \leftrightarrow x = (x_1, x_2)$

$Q \leftrightarrow y = (y_1, y_2)$

La differenza tra i due vettori

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \vec{P} - \vec{Q}$$

Penso il vettore differenza come applicato in Q con punta della freccia in P

$$d(x, y) = d(P, Q) = \|x - y\|$$

DISTANZA $\longrightarrow$ insiemi

Definizione

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, dato $r > 0$ $r \in \mathbb{R}$

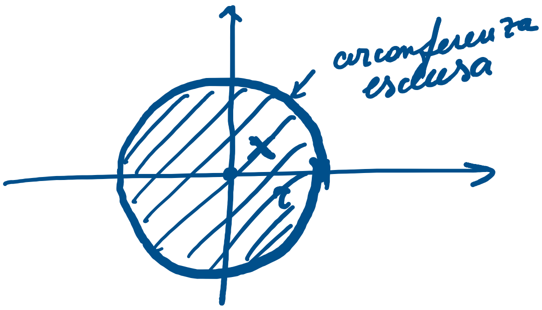
si dice PALLA di centro x e raggio r

l'insieme

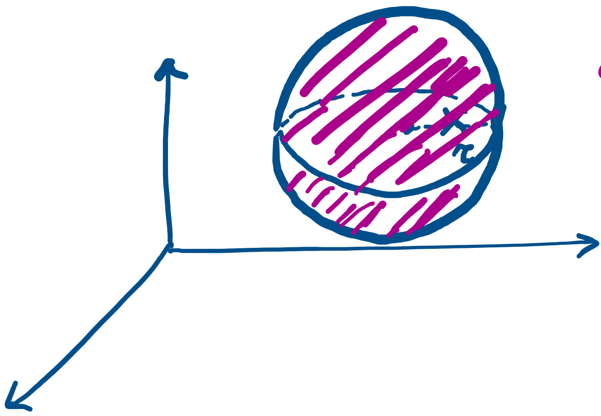
$$B(x,r) = B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r \}$$

"ball"

$\mathbb{R}^2$: $B(x,r) = B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r \}$



$\mathbb{R}^3$

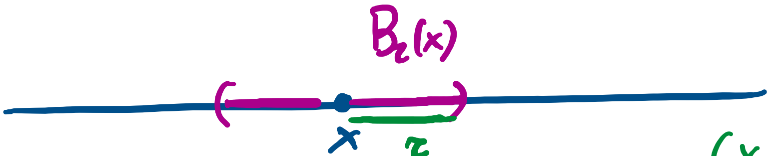


sfera piena privata del bordo

---

in $\mathbb{R}$ $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R} : \boxed{d(x,y) < r} \}$

$|x-y|$ ← valore assoluto



$(x-r, x+r)$

in $\mathbb{R}^n$ è $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$

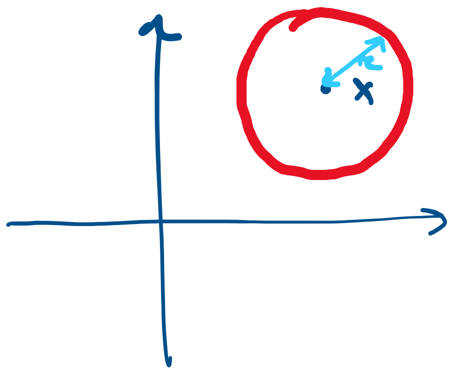
$$= \{y \in \mathbb{R}^n : \boxed{|x-y| < r}\}$$

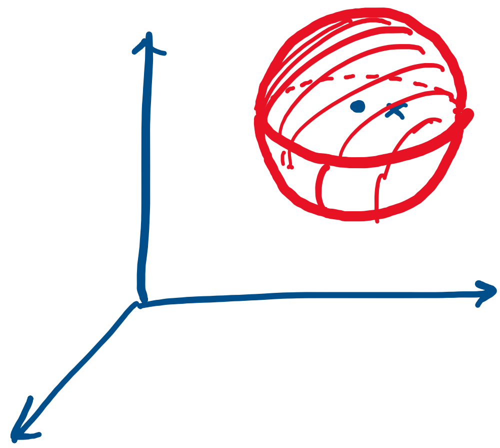
norma

Definizione Sia $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$

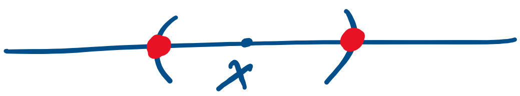
Si dice **SFERA** di centro x e raggio r, l'insieme

$$S(x,r) = S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}$$





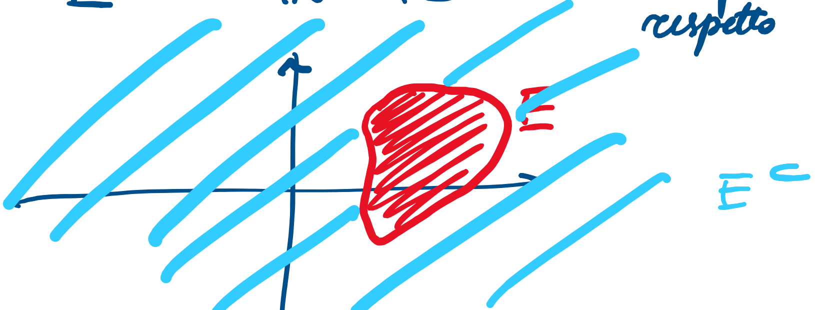
in $\mathbb{R} \to$ $S_r(x) = \{x-r\} \cup \{x+r\}$



Notazione

Se E è un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ = complementare di E rispetto a tutto $\mathbb{R}^n$



Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$

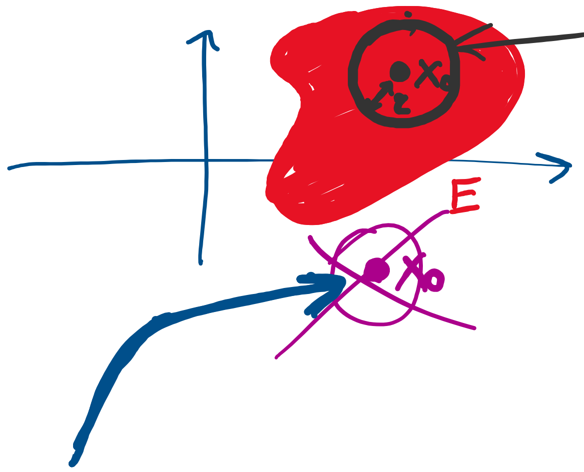
Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice

- **PUNTO INTERNO ad E** se esiste una palla di centro x_0 e raggio $r>0$ contenuta in E

$$\Updownarrow$$

se esiste $r>0$ t.c.

$$B_r(x_0) \subset E$$



$B_r(x_0) \subset E$

$\Downarrow$

x_0 è interno ad E

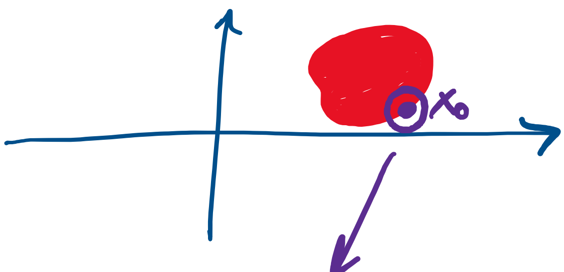
- **PUNTO ESTERNO ad E** se $\exists$ una palla di centro x_0 e raggio r tutta contenuta in E^c

$$\Updownarrow$$

$\exists r>0$ t.c.

$$B_r(x_0) \subset E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$$

- **PUNTO di FRONTIERA per E** se non è né interno né esterno



$\forall r>0 \quad B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$
$e \; B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$

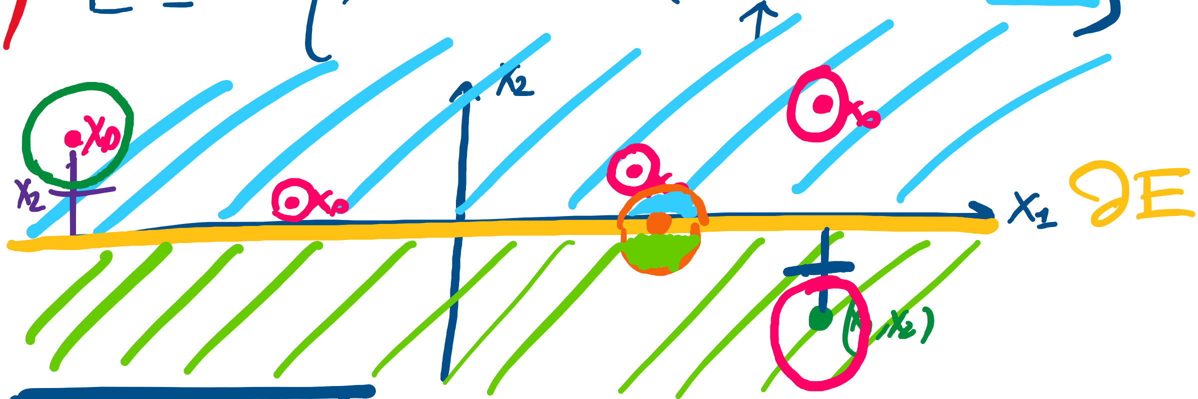
OSS

- se x_0 è PT INTERNO ad $E \Rightarrow x_0 \in E$ $\rightarrow \mathring{E} \subset E$
- se x_0 è PT ESTERNO ad $E \Rightarrow x_0 \notin E$
- se x_0 è PT di FRONTIERA $\Rightarrow x_0 \in E$ oppure $x_0 \notin E$

$\mathring{E}$ = insieme dei punti interni
∂E = insieme dei punti di frontiera di E

esempi

1) $E = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2) : x_2 > 0 \}$



- $\boxed{\mathring{E} = E}$ $\rightarrow$ prendo

$x_0 = (x_1, x_2) \in E \; : \; x_2 > 0$
scelgo $r < \frac{x_2}{2}$

$\Rightarrow B_r(x_0) \subset E \longrightarrow x_0 \in \mathring{E}$

$E \subset \mathring{E}$

$\Downarrow$

$E = \mathring{E}$

Tutti i punti di E sono pt. interni ad E
(il viceversa è sempre vero)

- $\partial E = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \}$

  $(x_1, 0) \in \partial E$

- Punti esterni $= \underbrace{\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0 \}}_{A}$

- Pt. esterni $\in E^c$

- $A \subset$ pt. esterni

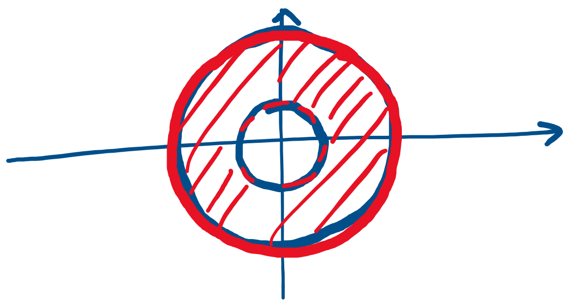
- $(x_1,x_2) \in A$, $x_2 < 0$ $\to$ scelgo $r < \frac{|x_2|}{2}$

  $B_r(x_1,x_2) \subseteq E^c$

  $\Downarrow$

  (x_1, x_2) è pt esterno

2) $E = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \underline{1 < x_1^2 + x_2^2 \leq 4} \}$



$\to$ <u>es</u>

$\mathring{E}$

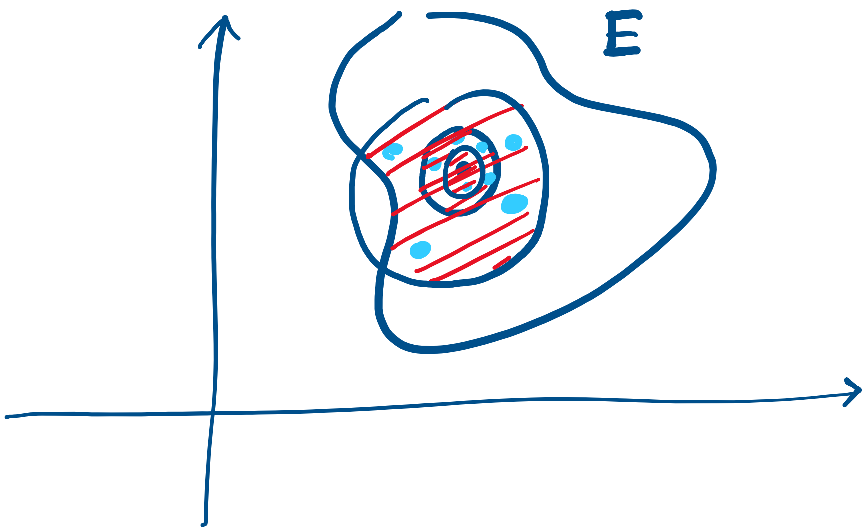
∂E

pt. esterni di E

Def Dato $E \subset \mathbb{R}^n$
Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice PUNTO di ACCUMULAZIONE per E se in ogni palla di centro x esiste un punto di E diverso da x

$\parallel$

$$\forall r>0 \quad B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset$$



OSS

PUNTO INTERNO $\Longrightarrow$ PT di ACCUMULAZIONE

Def

Se un punto di E non è di accumulazione per E allora si dice PUNTO ISOLATO

Def

1) Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se ogni $x \in E$ è punto interno ad E
cioè se $E = \mathring{E}$

2) Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSO se E^c è aperto

($\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sia aperti che chiusi)

Esempi

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ è aperto

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ è chiuso

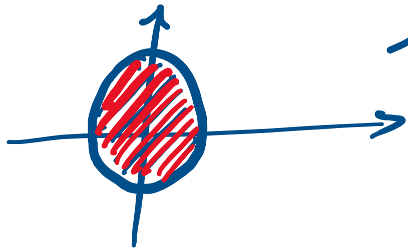
Teorema

E contiene tutto $\partial E \iff E$ chiuso

$\underline{\partial E \subset E} \iff E$ chiuso

Esempi

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ è aperto



$\partial E = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$\overline{E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0\}}$

$\downarrow$

retta

$E = \partial E \rightarrow$ chiuso

PROPRIETÀ degli APERTI (di $\mathbb{R}^n$)

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono aperti
- unione (anche numerabile) è aperta

  $E_1, \dots, E_n, \dots$ aperti $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = E$ è aperto
- intersezione (finita) di insiemi aperti è un insieme aperto

PROPRIETÀ di CHIUSI

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono chiusi
- unione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso
- intersezione (anche numerabile) di insiemi chiusi è chiusa

Def

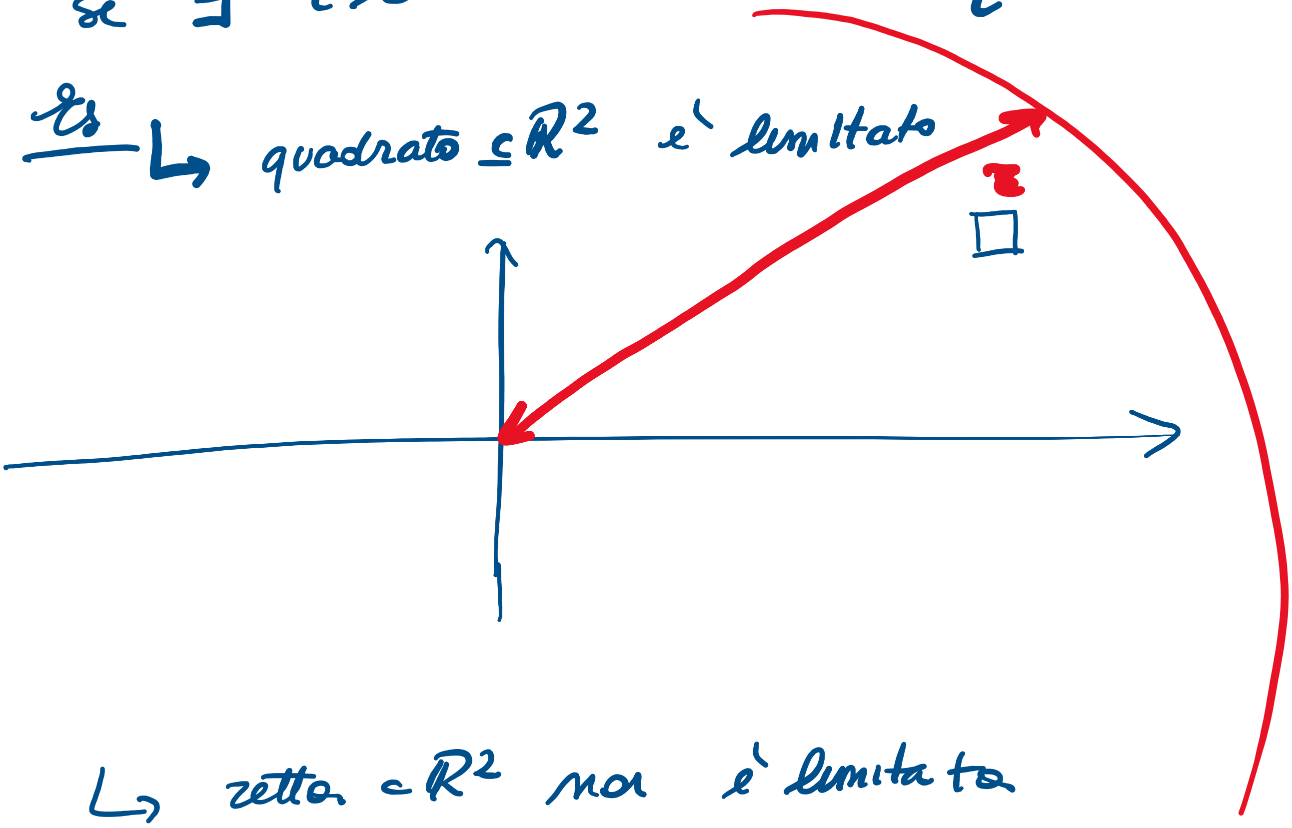
Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice LIMITATO se esiste una palla di centro l'origine che contiene tutto E

$\Updownarrow$

se $\exists$ $r>0$ t.c. $E \subset B_r(0)$

Es

↳ quadrato $\subseteq \mathbb{R}^2$ è limitato



↳ retta $\subset \mathbb{R}^2$ non è limitata