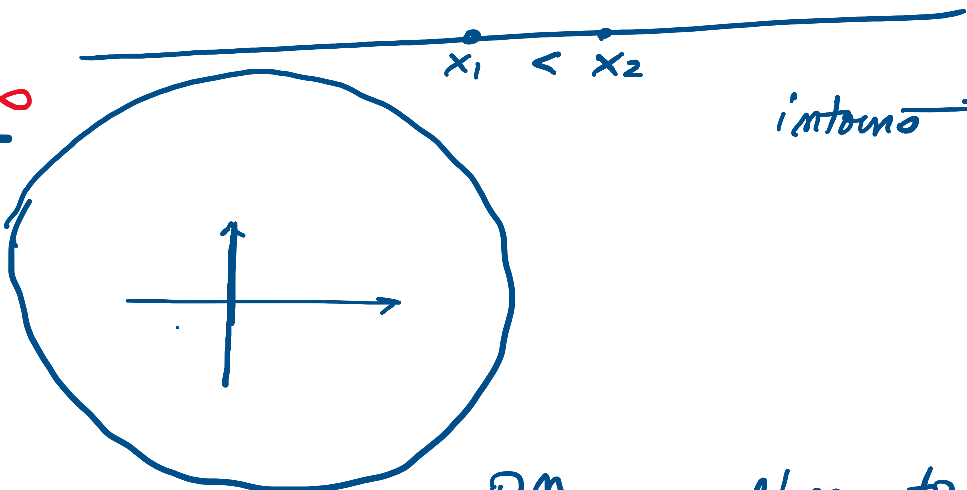
$\mathbb{R}^n$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

→ palla di centro x e raggio r — intorno sferico di x di raggio r

→ $\left\{ \begin{array}{l} \to \text{Pt interno, est. ...} \\ \to \text{Pt di accumulaz.} \\ \to \text{aperti, chiusi} \\ \to \text{limitato} \end{array} \right.$

$\mathbb{R} \to \quad \dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$



intorno → $-\infty$

intorno → $+\infty$

$\mathbb{R}^n$

↓

$\dot{\mathbb{R}}^n$ = insieme ottenuto da $\mathbb{R}^n$ con l'aggiunta di un punto $\{\infty\}$

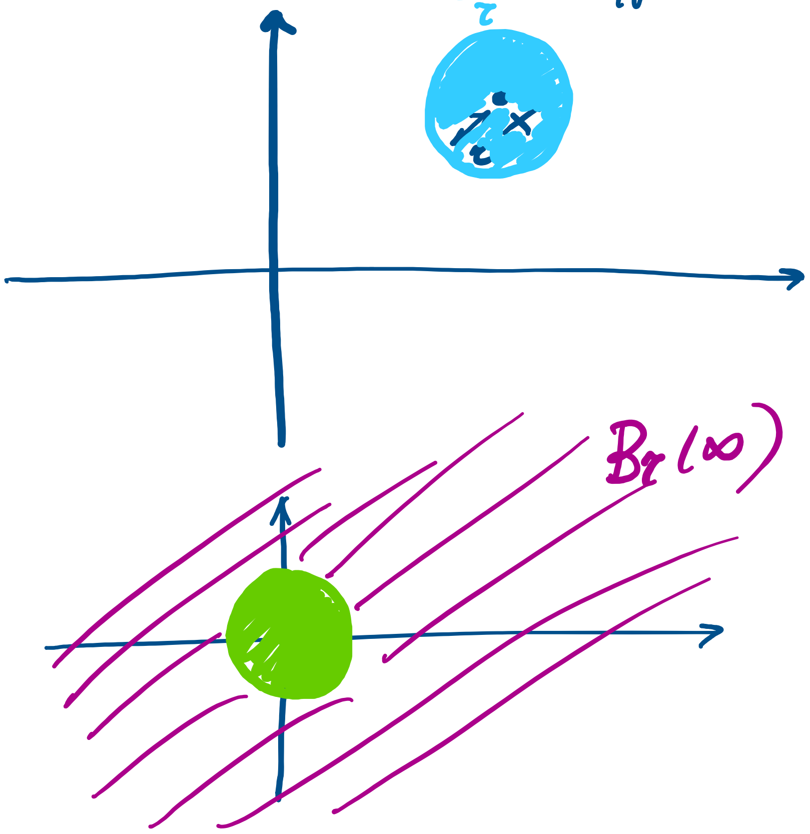
↑ INTORNO?

Definizione

Un intorno sferico di raggio r di ∞ (PALLA di centro ∞ e raggio r) è il complementare della palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ con centro l'origine e raggio r

es $\mathbb{R}^2$

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$



chiuso

$x = \infty$

$B_r(\infty) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$

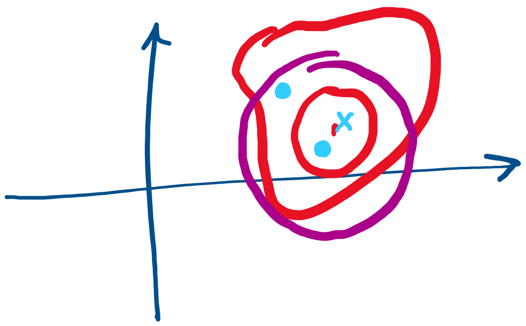
$\forall \ \overline{B_r(0)} \longrightarrow$ trovo un intorno sferico di ∞ definito come $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$

$\dot{\mathbb{R}}^n$

OSS

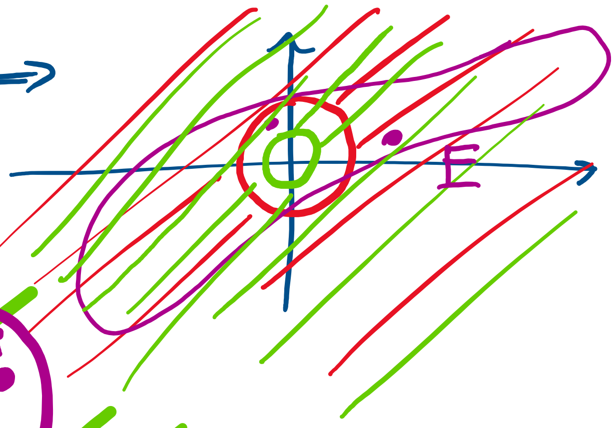
Def di punto di accumulazione

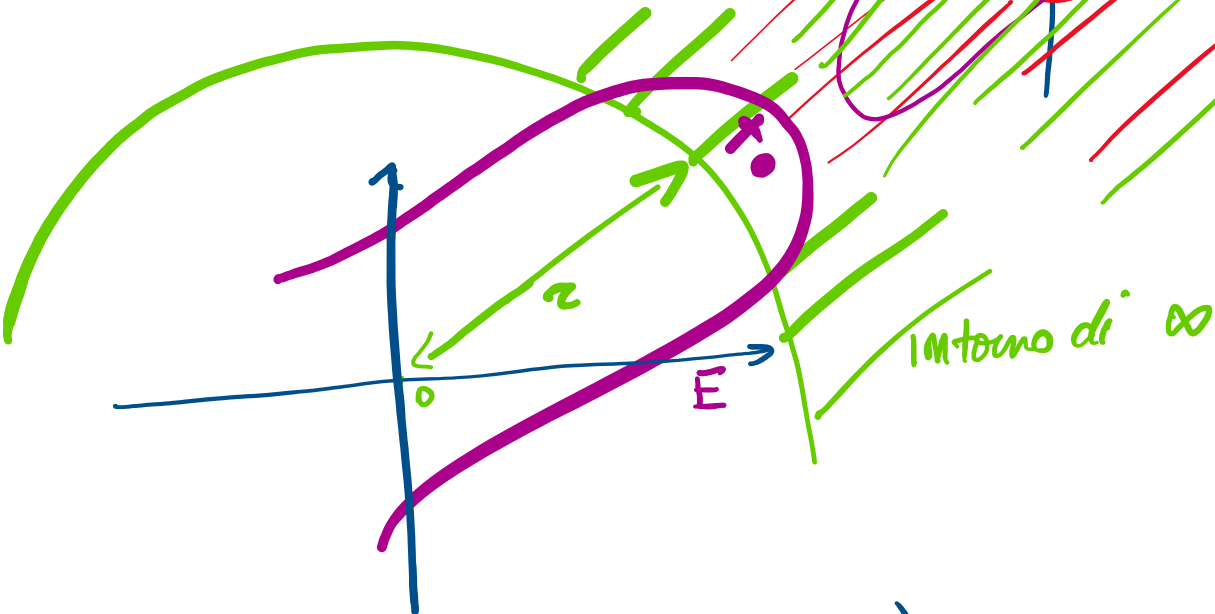
$E \subseteq \mathbb{R}^n$ x si dice di accumulazione per E se in ogni palla di centro x esiste un punto E diverso da x



Un insieme non è limitato se e solo se ∞ è punto di accumulazione

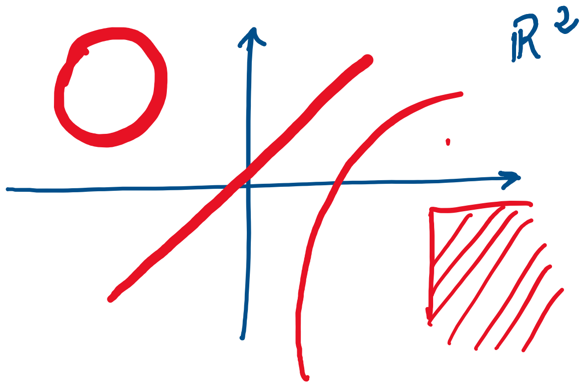
∞ è punto di accumulazione $\iff$





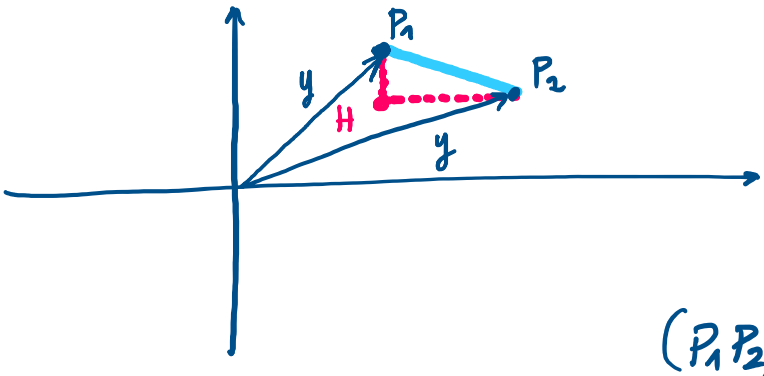
($\to$ limiti di $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) .

"Oggetti che vivono in $\mathbb{R}^n$",



$\to$ dominio di funzioni $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Piano $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$



$P_1 = x = (x_1, x_2)$

$P_2 = y = (y_1, y_2)$

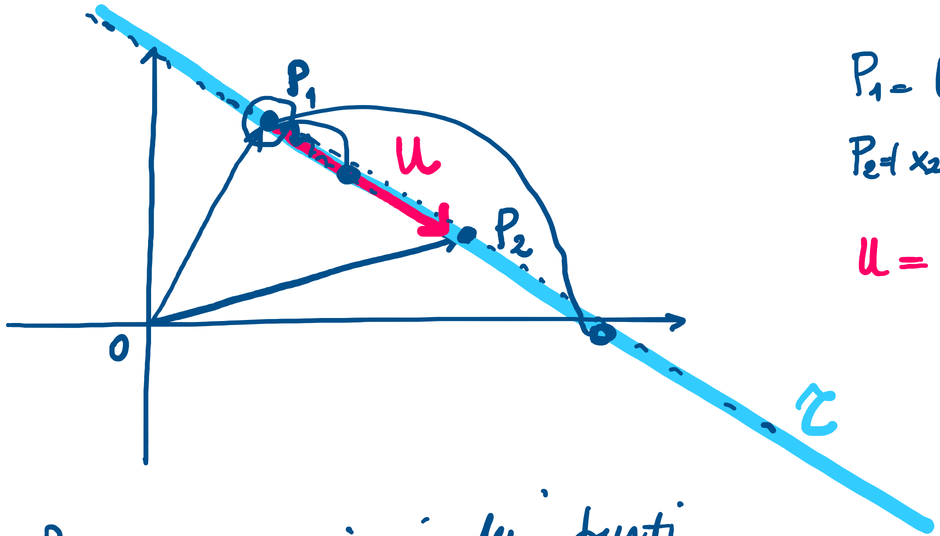
$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\downarrow$

teorema di Pitagora

$(P_1P_2)^2 = (P_1H)^2 + (P_2H)^2$

Retta per 2 punti → equazione



$P_1 = (x_1, y_1) = v$

$P_2 = (x_2, y_2) = w$

$u = w - u$

Retta = insieme dei punti che ottengo partendo da P_1 e spostandomi in direzione di u

parametro

$$\text{Retta} = \left\{ \underset{t \in \mathbb{R}}{P = v + t\,u} \right\} = \left\{ \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}} \right\}$$

t è un parametro

FORMA PARAMETRICA della retta passante per P_1 e P_2

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases} \right) =$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

FORMA CARTESIANA della retta passante per P_1 e P_2

$$x - x_1 = \frac{(y - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = y\,\frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - \frac{y_1(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$$

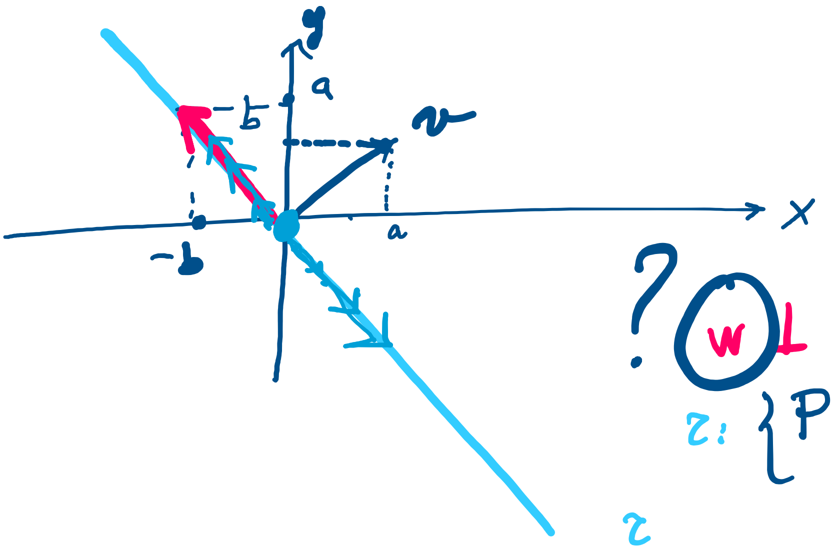
$$x - y\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) + \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 = 0$$

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

almeno uno tra a e b deve essere $\neq 0$

OSS Nella forma $ax+by+c=0$ due equazioni rappresentano la stessa retta $\Longleftrightarrow$ sono l'una multipla dell'altra

Retta perpendicolare a v passante per l'origine



$v = (a, b)$ dato (lo conosco)
$\quad\;\; \uparrow \;\; \uparrow$
$\quad\;\; x_1, \; y_1$

? $w \perp v$

$r: \{P = t \cdot w, \quad t \in \mathbb{R}\}$

$v \perp w \Longleftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$w = (w_1, w_2)$

(Sto cercando w_1 e w_2 t.c. $w \perp v$)

$\Updownarrow$

$\langle (a,b), (w_1, w_2) \rangle = 0$

$a \cdot w_1 + b w_2 = 0$

Posso scegliere $w_1 = -b$ e $w_2 = a$.
In questo modo

$$\langle v, w \rangle = a \cdot \underbrace{-b}_{w_1} + b \cdot \underbrace{a}_{w_2} = 0$$

$\underline{w = (-b, a)}$ è tale che $w \perp v$

w è determinato da v

(anche $-w = (a,-b) \perp v$)

$$r: \left\{ P = t \cdot w \right\}_{t \in \mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

$(= 0 + t \cdot w)$

forma parametrica

parametro

$$\begin{cases} x = -tb \\ y = ta \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{y}{a} \\ \downarrow \\ x = -\dfrac{y}{a} \cdot b \end{cases} \rightarrow \boxed{ax + by = 0}$$

forma cartesiana

OSS

1) $ax + by = 0$ forma cartesiana della retta passante per l'origine $\Longleftrightarrow c = 0$

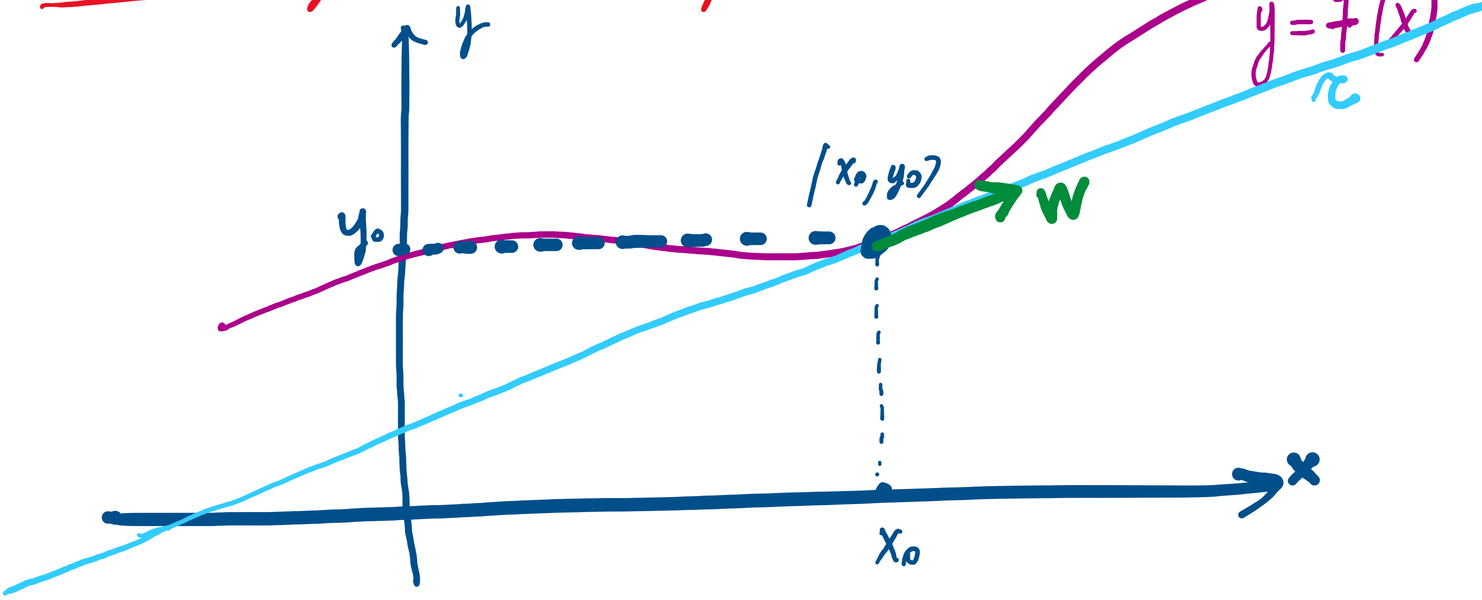
$x=0$ $\quad y=0$

e $\perp$ a $v = (a,b)$

2) Data una retta $\boxed{ax + by + c = 0}$

$\Rightarrow v = (a,b)$ è $\perp r$

Retta tangente ad un grafico



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, derivabile, con derivate continue su tutto $\mathbb{R}$

$\text{graf}(f) \subset \mathbb{R}^2$

$x_0 \in \mathbb{R}$ chiamo $y_0 = f(x_0)$,

<u>Sviluppo di Taylor di f</u> in x_0 al 1° ordine

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + o(x-x_0)$$

$y = f(x)$ <u>grafico di f</u>

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

che grafico rappresenta?

1) è una <u>retta</u>

$$\underbrace{f'(x_0)}_{a}x + \underbrace{1}_{b=1}y \underbrace{- f'(x_0)x_0 + f(x_0)}_{c} = 0$$

2) passa per (x_0, y_0)

Sostituisco $x = x_0 \to y = f(x_0) = y_0$

3) Sviluppo di Taylor $\Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$

$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$ è la retta tangente al grafico $y = f(x)$ in (x_0, y_0)

$ax + by + c = 0$

$y - f(x_0) \quad f'(x_0)\cdot(x - x_0) = 0$

$y - f(x_0) \quad '(x_0)x + f'(x_0)x_0 - 0$

$-f'(x_0)x \;,\; 1\cdot y + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$

forma cartesiana di r

$ax + by + \quad 0$

con $\quad a = -f'(x_0)$

$b = 1$

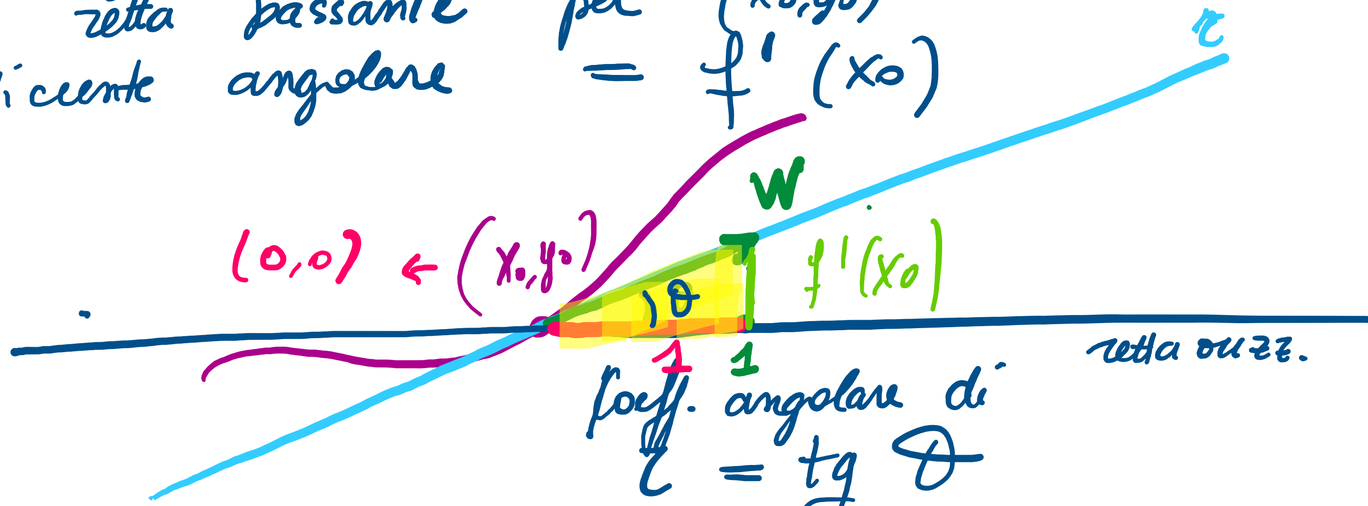
$v = (\quad b) = (-f'(x_0), 1)$ è perpendicolare a r

$\Longrightarrow \vec{t}.\ (1, f'(x_0))$ è vettore tangente ad r

$\langle v, w\rangle = 0$

$W = (1, f'(x_0))$

La retta tg grafico di $f(x)$ in (x_0, y_0) per def. è la retta passante per (x_0, y_0) che ha coefficiente angolare $= f'(x_0)$



coeff. angolare di $r = tg\,\theta$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f'(x_0)}{1} = f'(x_0)$$

La retta r di eq. $y - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$
che ha come vettore tangente w
ha come coefficiente angolare $f'(x_0)$

— r passa per (x_0, y_0)
— r ha come coeff. angolare $f'(x_0)$

$\Downarrow$

r è la retta tg. a $y = f(x)$ in (x_0, y_0)

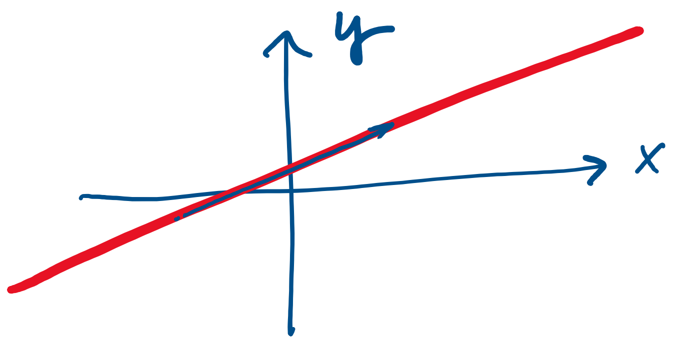
$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

forma cartesiana

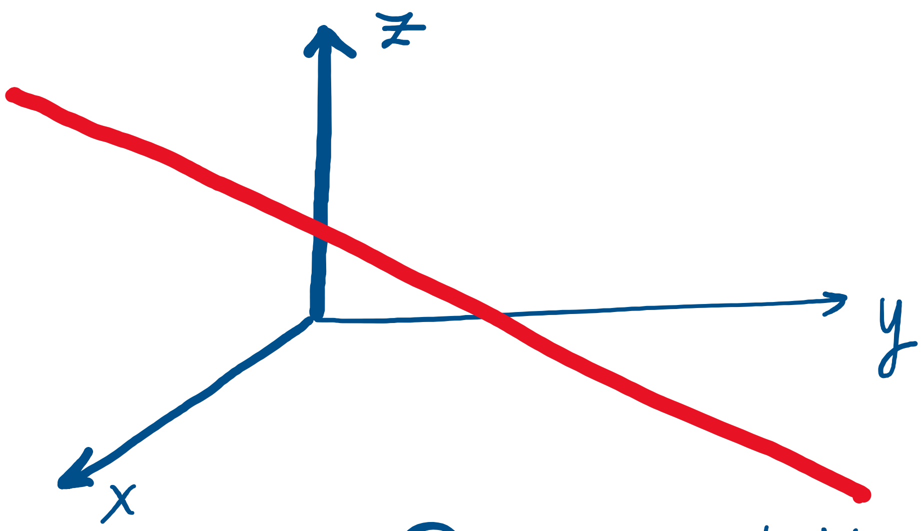
$$\boxed{r: \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

forma parametrica

In $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ una retta è descritta da una sola <u>equazione</u>



$\mathbb{R}^3$ spazio cartesiano



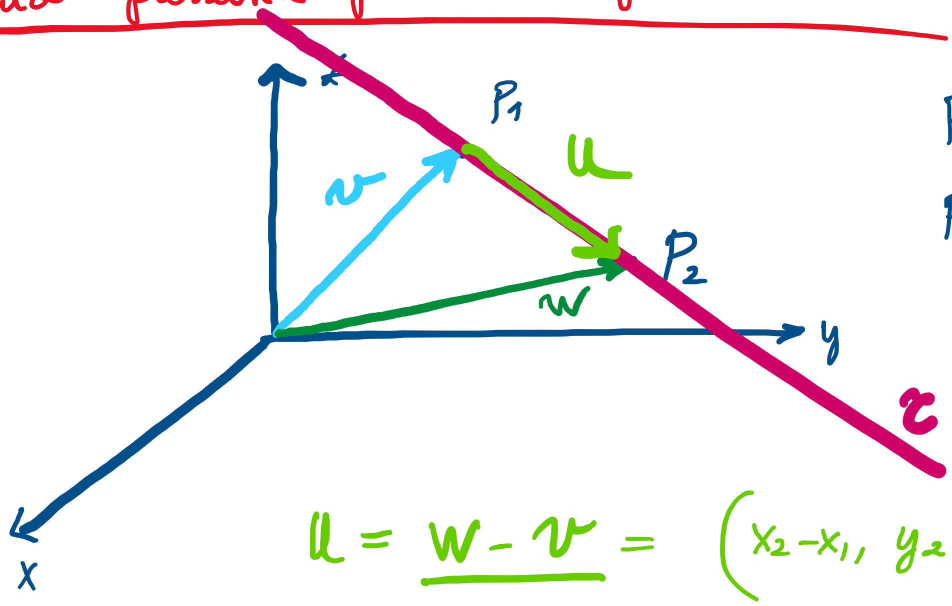
$v = (x_1, y_1, z_1)$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ 3 gradi di libertà (x, y, z)

retta $\rightarrow$ 1 grado di libertà

$\rightarrow$ 1 retta nello spazio $\Updownarrow$ 2 eq.

Retta passante per due punti in $\mathbb{R}^3$



$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = v$

$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = W$

$u = \underline{W - v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

FORMA PARAMETRICA di r

$$r : \{ P = v \underset{t \in \mathbb{R}}{+} t u \}$$

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}} \right\}$$

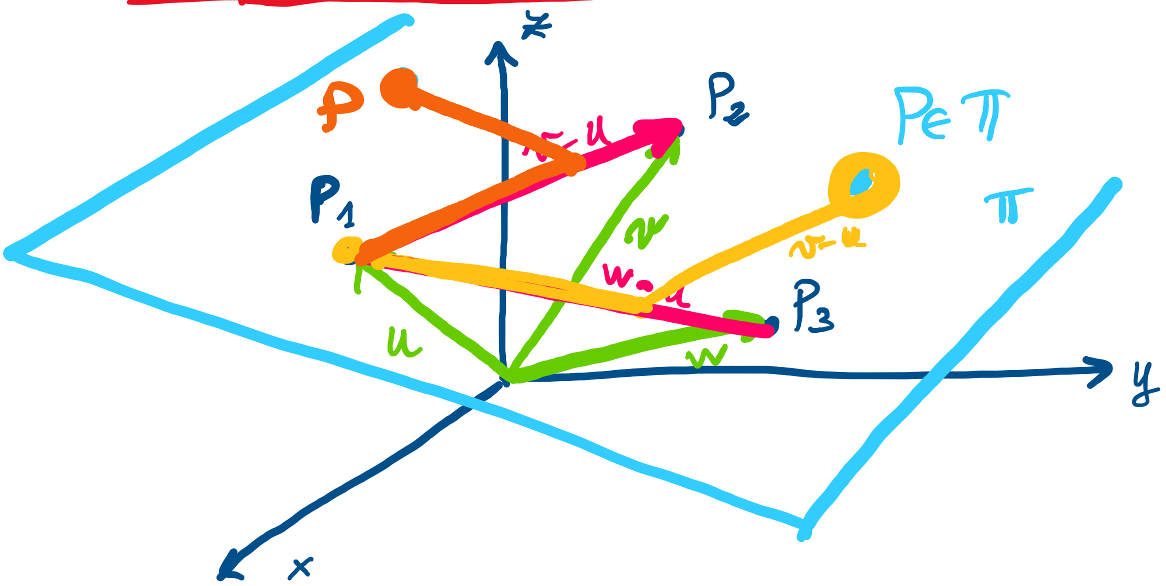
FORMA CARTESIANA di r

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ t = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z - z_2} \end{cases}}$$

forma cart.

Piano in $\mathbb{R}^3$ passante per 3 punti



$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = u$

$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = v$

$P_3 = (x_3, y_3, z_3) = w$

Piano $\longleftrightarrow$ 2 gradi di libertà
Spazio $\longleftrightarrow$ 3 gradi di libertà
$\Rightarrow$ Ci aspettiamo un'equazione lineare per definire un piano nello spazio

π : piano passante per P_1, P_2, P_3

$$P_2 - P_1 = v - u = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$P_3 - P_1 = w - u = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$$

FORMA PARAMETRICA di π

$$\pi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1 + t(v-u) + s(w-u),\ t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{\pi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_2 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z \end{pmatrix} \right\}_{t, s \in \mathbb{R}}}$$

forma parametrica di π

FORMA CARTESIANA

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - x_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{cases}$$

$$\frac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)}=\frac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}-\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}-\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)}$$

1 eq. lineare $\longrightarrow$ eq. cartesiana di π

piano passante per $P_1, P_2, \underline{P_3}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = t + s\,\dfrac{(x_3-x_1)}{x_2-x_1} \\[2ex] \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = t + s\,\dfrac{(y_3-y_1)}{y_2-y_1} \\[2ex] \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = t + s\,\dfrac{(z_3-z_1)}{z_2-z_1} \end{cases} \quad -$$

1^aeq. $-$ 2^aeq.
1^aeq. $-$ 3^aeq.

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = s\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right) \\[2ex] \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = s\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)} \\[4ex] s = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)} \end{cases} =$$

eq di π

$$\boxed{\dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)}}$$