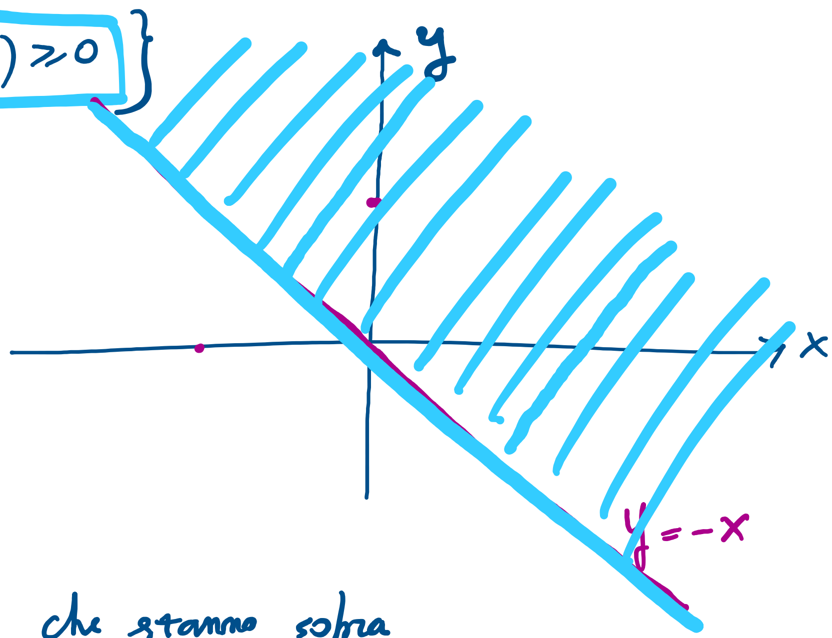
Disegno di insiemi nel piano

OBIETTIVO: disegnare insiemi di $\mathbb{R}^2$ descritti da equazioni e/o disequazioni

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{(x+y) \geq 0}\}$ $\quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$



$x+y \geq 0 \iff y \geq -x$

$y = -x \longrightarrow$ retta

$x + y = 0$

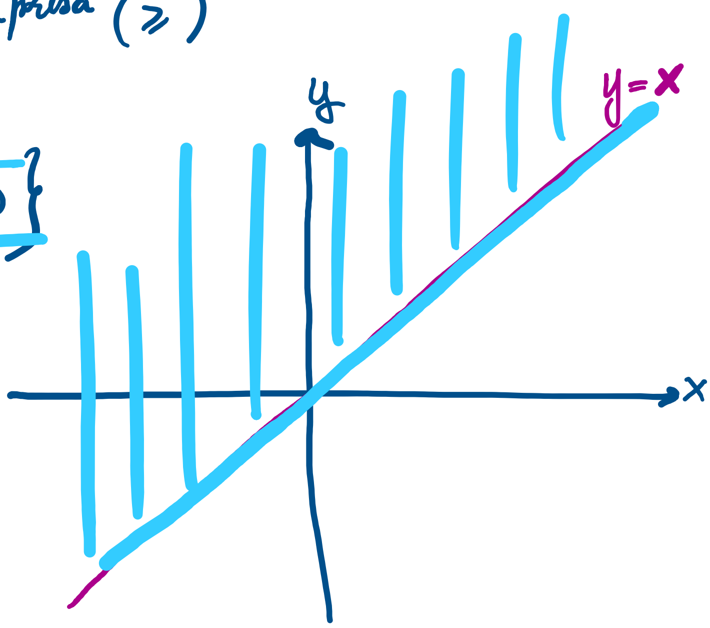
$\boxed{y \geq -x} \iff$ punti che stanno sopra la retta $y = -x$, retta compresa ($\geq$)

2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{x - y \leq 0}\}$

$\Updownarrow$

$\boxed{y \geq x}$

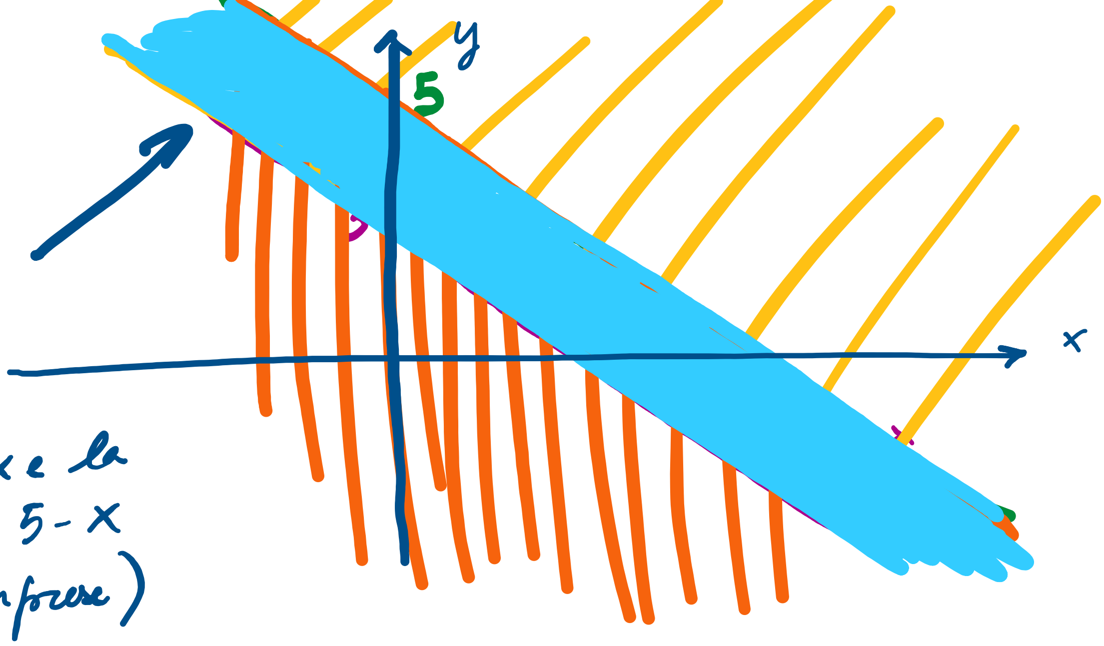
$y = x$ retta



3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{3 \leq x+y \leq 5}\}$

Sono 2 condizioni che devono essere verificate contemporaneamente

$$\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x+y \leq 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 3-x \longrightarrow \boxed{y = 3-x} \text{ retta} \\ y \leq 5-x \longrightarrow \boxed{y = 5-x} \text{ retta} \end{cases}$$



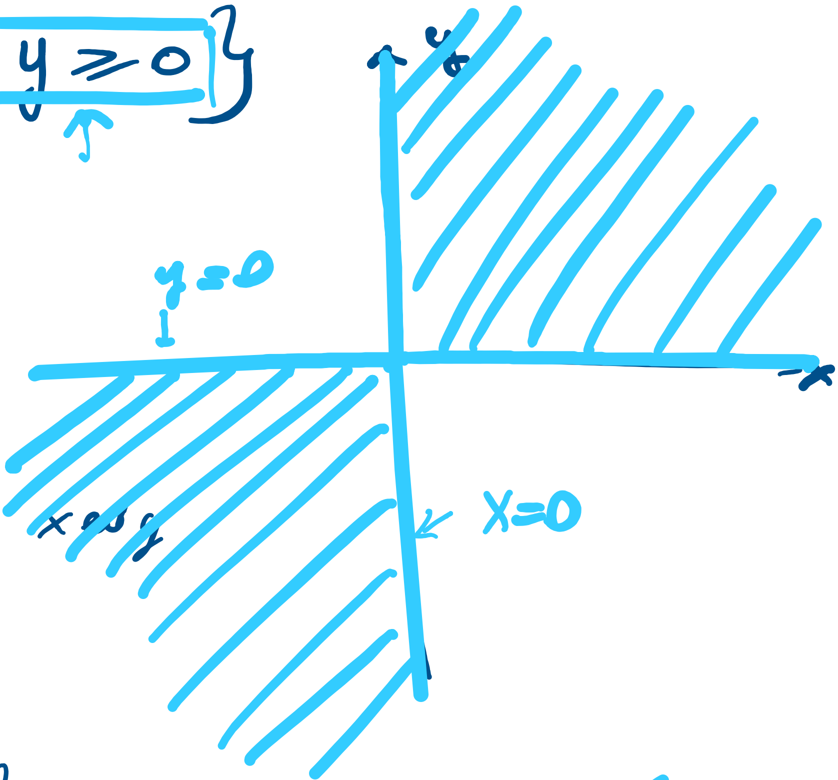
Striscia compresa tra la retta $y=3-x$ e la retta $y=5-x$ (rette comprese)

4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \boxed{x\cdot y \geq 0}\}$

$x\cdot y\geq 0$

$\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x\leq 0\\ y\leq 0\end{cases}$

Affinché $x\cdot y\geq 0$ devono essere concordi



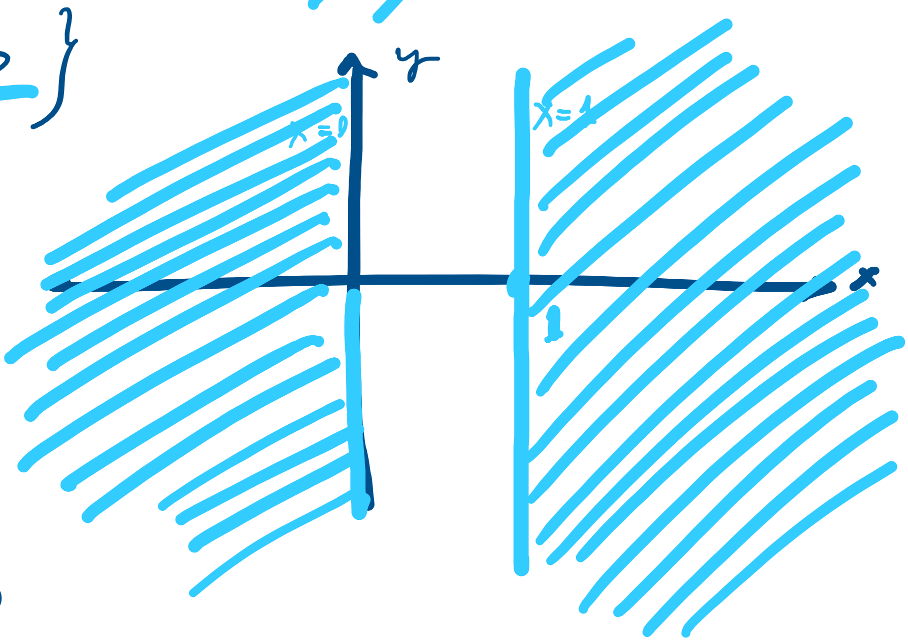
5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-x\geq 0\}$

$x^2-x\geq 0$

$x(x-1)\geq 0$

$\begin{cases} x\geq 0\\ x\geq 1\end{cases}$ o $\begin{cases} x\leq 0\\ x\leq 1\end{cases}$

$x\geq 1$ o $x\leq 0$



6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \geq 8\}$

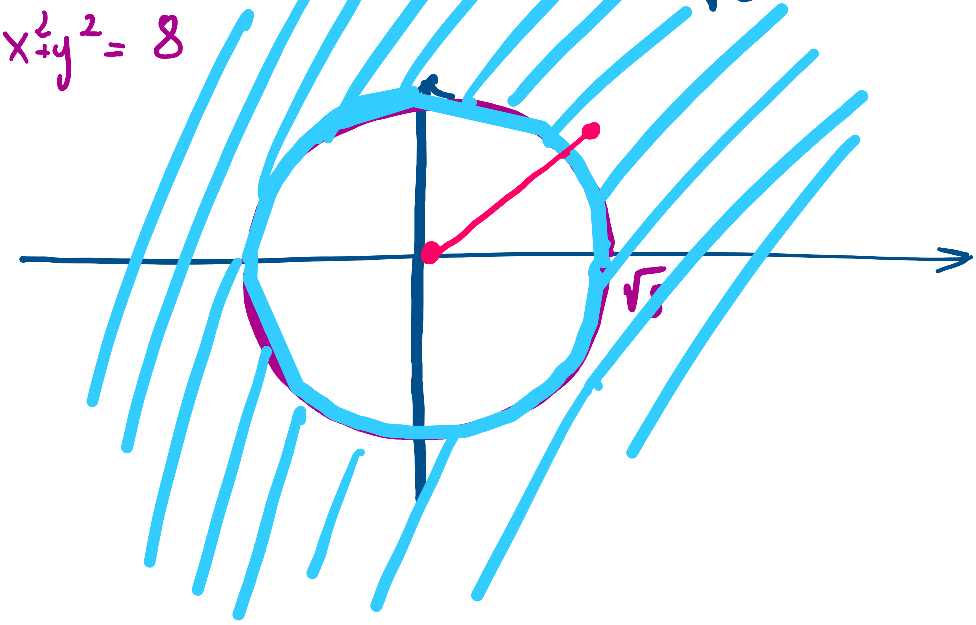
$$(x,y) \to \underline{x^2+y^2} = d^2((x,y),(0,0))$$

$$d((x,y),(0,0)) = |(x,y)-(0,0)| =$$

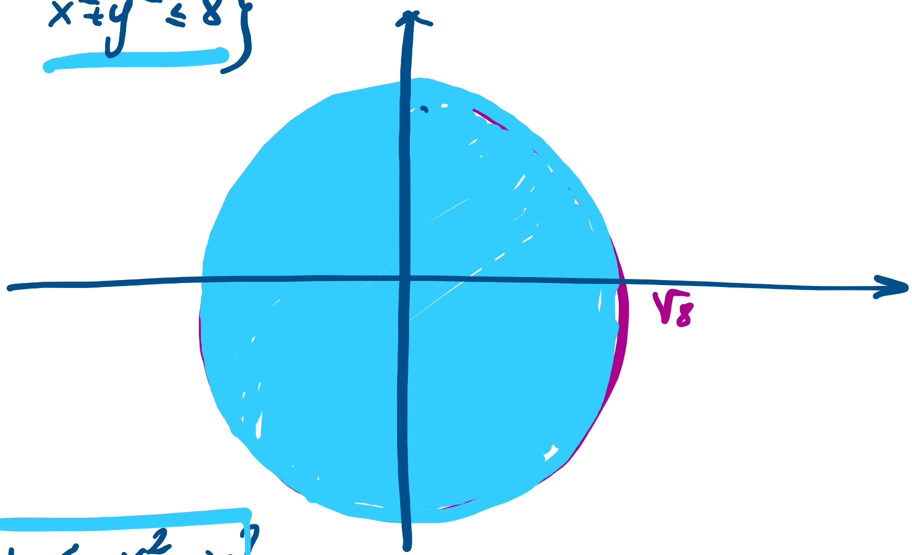
$$= |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\boxed{x^2+y^2 \geq 8}$ $\Longleftrightarrow$ distanza di (x,y) dall'origine $\geq \sqrt{8}$

$x^2+y^2 = 8$

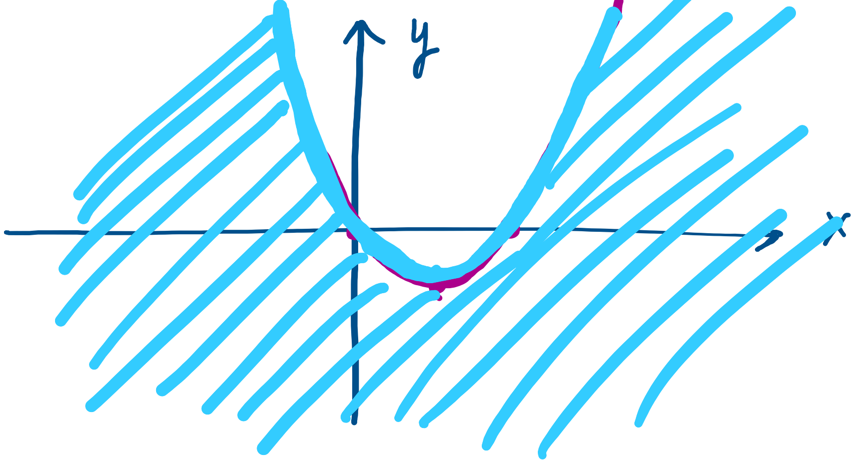


7) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \underline{x^2+y^2 \leq 8}\}$



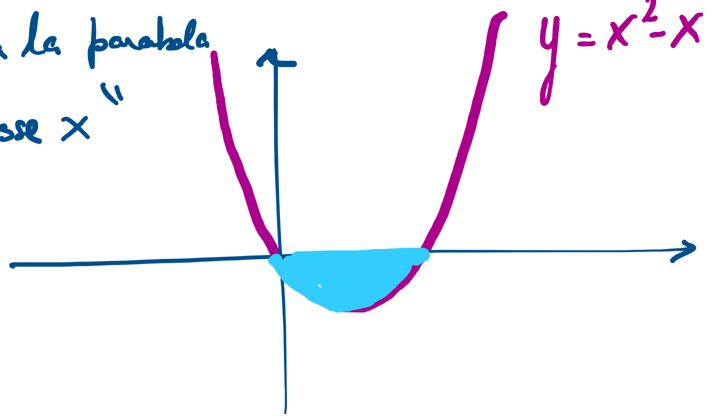
8) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{y \leq x^2 - x}\}$

$\underline{y = x^2 - x} \longrightarrow$ parabola



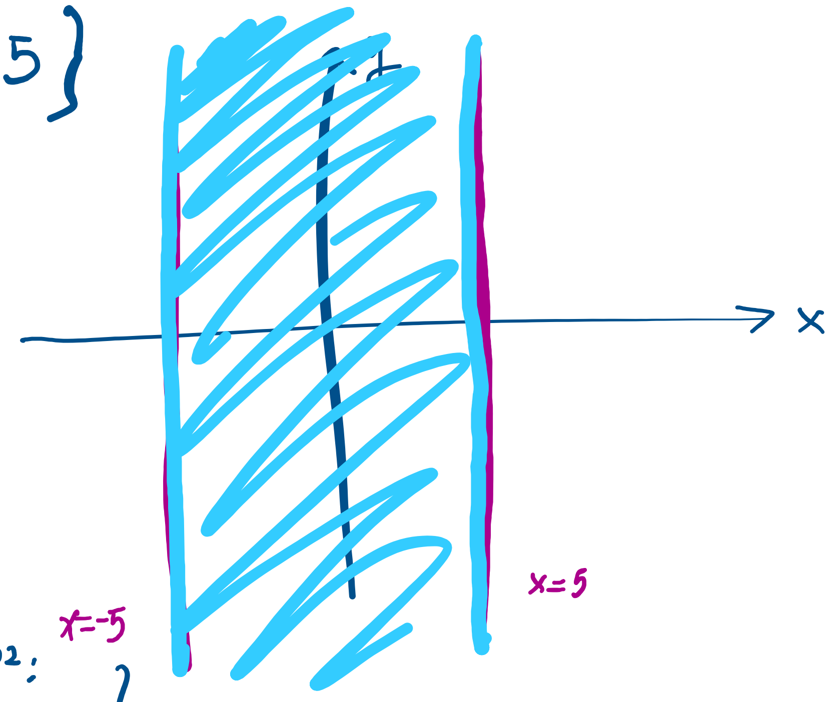
10) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underline{x^2-x \leq y} \leq 0\}$

$$\begin{cases} y \geq x^2-x & \text{"sopra la parabola"} \\ y \leq 0 & \text{"sotto l'asse } x\text{"} \end{cases}$$



11) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x| \leq 5\}$

$-5 \leq x \leq 5$



In generale $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x| \leq A\}$ ha come soluzione

- $\emptyset$ se $A<0$
- $x=0$ se $A=0$
- $-A \leq x \leq A$ se $A>0$

$x\in\mathbb{R}$, valore assolut

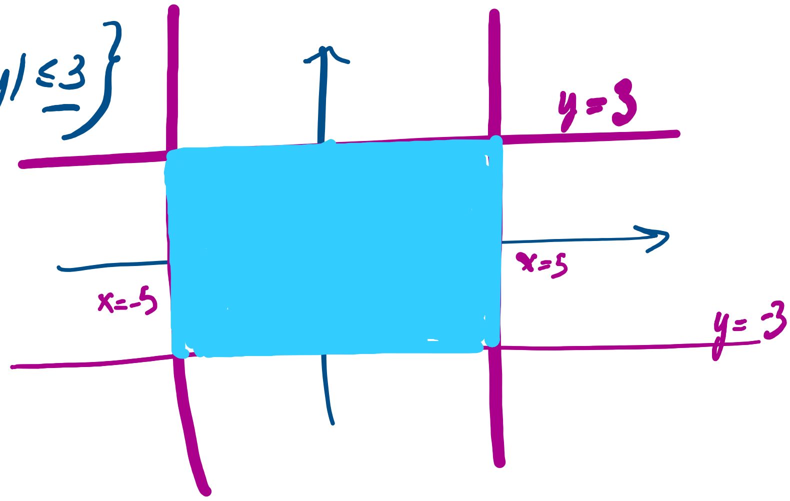
Analogamente, la disequazione $|x| \geq A$ ha come soluzioni

- tutto $\mathbb{R}$ se $A \leq 0$
- $x \leq -A$ e $x \geq A$ se $A > 0$

12) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 5, \ |y| \leq 3\}$

$|x| \leq 5 \iff -5 \leq x \leq 5$

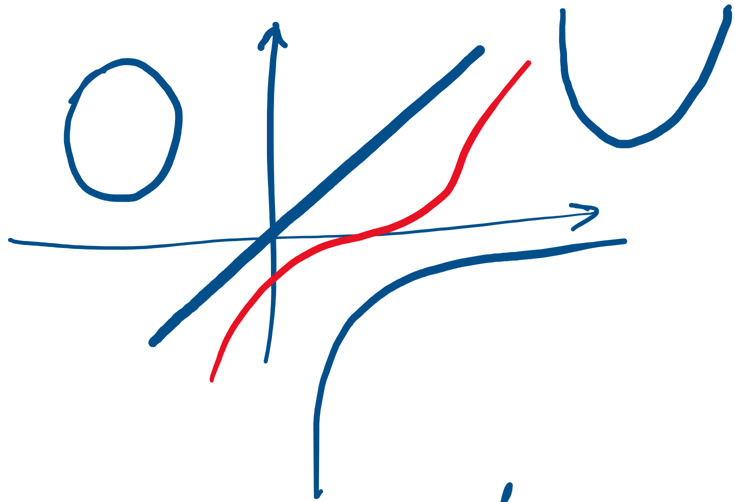
$|y| \leq 3 \iff -3 \leq y \leq 3$



esercizi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \geq 1\}$
2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y + |x| \leq 0\}$
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ xy \leq 1\}$
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 3x + 2 \leq 0, \ y^2 - 4 \leq 0\}$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sin x - y \leq 0\}$
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq y \leq 8\}$
7) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq x \leq 8\}$
8) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 2\}$
9) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 4, \ x^2 + y^2 \geq 9\}$
10) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$

Curva nel piano (nello spazio)



Def: Una CURVA nel PIANO è una funzione

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\underline{I \subseteq \mathbb{R}}$$

$I = (a,b)$ int. aperto
$I = [a,b]$ int. chiuso

Se $I = [a,b]$ int. chiuso allora possiamo definire

Def $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ si dice CHIUSA se

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

(sostituisco gli estremi nella funzione γ)

N.B. $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \in I$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

2 funzioni $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x(t)$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y(t)$

esempio

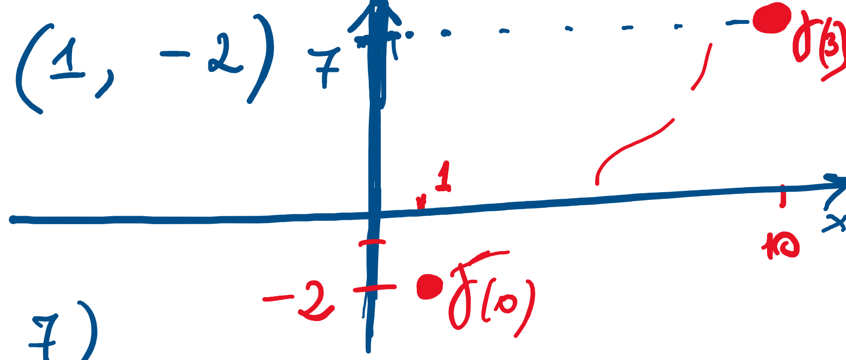
$\gamma(t) = (t^2+1, 3t-2)$ $t \in [0,3]$ è una curva

$[a,b] = [0,3]$ $\longrightarrow$ Per ogni punto $t \in [0,3]$ la curva γ individua un punto del piano

$x(t) = t^2+1$

$y(t) = 3t-2$

$t=0 \rightarrow \gamma(0) = (1, -2)$



$t=3 \rightarrow \gamma(3) = (10, 7)$

Cosa rappresenta una curva?

Un punto che si muove nel piano → spazio

$t =$ "tempo"

$\gamma(t) =$ " in che punto ~~piano~~ spazio si trova la mia curva al tempo t"

Def

Una **CURVA** nello spazio è una funzione

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$I \subseteq \mathbb{R}$$

Es

$$\gamma(t) = (t^2, \sin t, e^t) \qquad t \in [-1, 1]$$

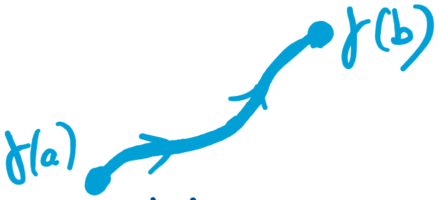
curva nello spazio

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

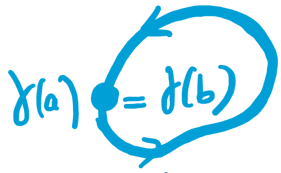
$$\left.\begin{array}{l} x : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ y : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ z : I \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \leftarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Def

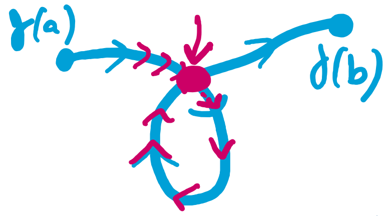
Una curva si dice **SEMPLICE** se "non ritorna mai su se stessa (tranne al massimo $\gamma(a) = \gamma(b)$)"



semplice
NON CHIUSA
$(\gamma(a) \neq \gamma(b))$



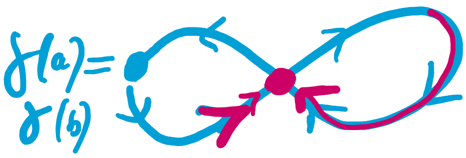
semplice e
CHIUSA



NON CHIUSA
NON SEMPLICE

$\exists\, t_1 \neq t_2$
$\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$



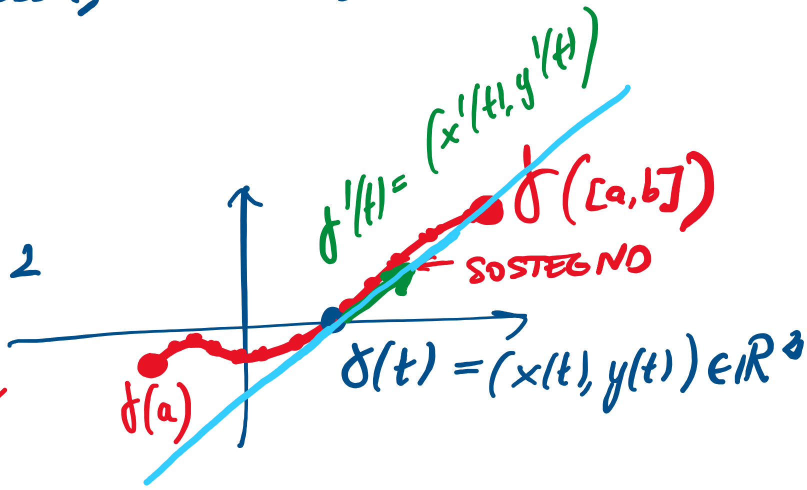
CHIUSA $(\gamma(a) = \gamma(b))$
NON SEMPLICE

Def
Si dice **SOSTEGNO** di una curva l'immagine della curva stessa, cioè la traiettoria percorsa dal punto

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\gamma([a,b])} \subseteq \mathbb{R}^2$

Immagine di γ



t "tempo" $\longrightarrow$ $\gamma(t)$ punto in $\mathbb{R}^2$ dove si trova la curva al punto t

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

Def Sia I intervallo $\subset \mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$. Si dice **VETTORE TANGENTE** alla curva il vettore

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

(assumendo che $x'(t)$ e $y'(t)$ esistano.)

Oss

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \to \quad x'(t)$ sappiamo calcolarla

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \to \quad y'(t)$ " "

Def

La **Retta tangente** ad una curva in punto è la retta che passa per il punto ed ha come direzione il vettore tangente alla curva nel punto stesso.

Esempio

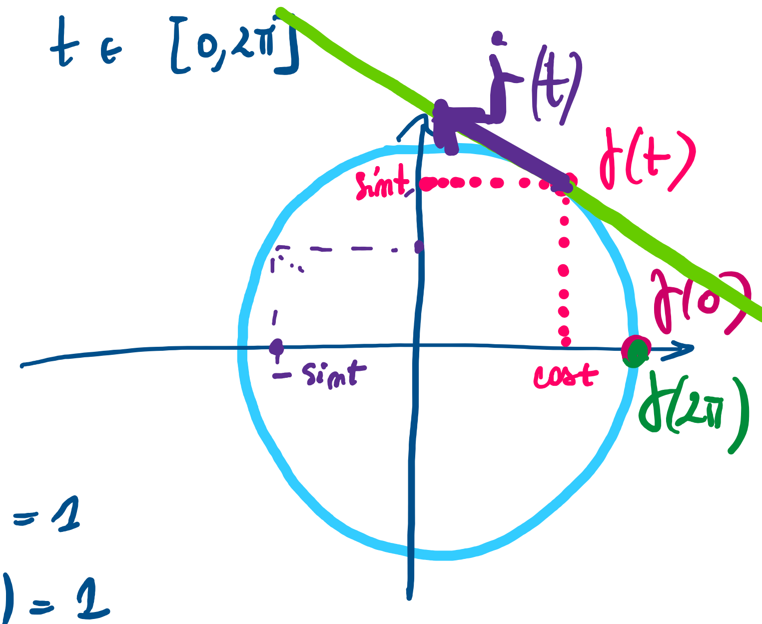
$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$x(t) = \cos(t)$

$y(t) = \sin(t)$



$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

$\forall t \in [0, 2\pi] \qquad x^2(t) + y^2(t) = 1$

Il sostegno di γ è la circonferenza (di $\mathbb{R}^2$) di equazione $x^2 + y^2 = 1$

$\forall t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Vettore tangente $\quad \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-\sin t, \cos t)$

$\gamma(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$

$\gamma : [0, 2\pi]$

$\gamma(2\pi) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$

$\gamma(0) = \gamma(2\pi) \to$ curva chiusa

Retta tangente nel punto t a $\gamma(t)$

$$r: \underline{\gamma(t)} + s\,\dot{\gamma}(t) \qquad s \in \mathbb{R}$$

forma parametrica

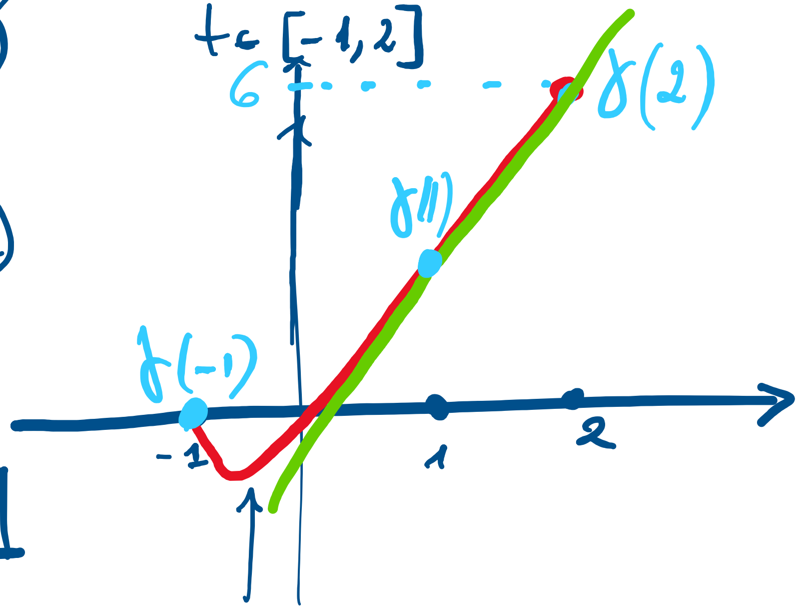
esempio $\quad x(t) = t \quad y(t) = t^2 + t$

$$\gamma(t) = (t,\ \underline{t^2+t}) \qquad t \in [-1, 2]$$

$x(t) = t$

$y(t) = (t)^2 + (t)$

X



La curva percorre il tratto della parabola $\boxed{y = x^2 + x}$

con $x \in [-1, 2]$

sostegno della curva

- curva semplice non chiusa

$$\gamma(-1) = (-1,\ 0)$$
$$\gamma(2) = (2,\ 6)$$

Calcolare la retta tangente nel p.to corrispondente a $t = 1$

$$\gamma(1) = (1,\ 2)$$
$$\gamma'(t) = (1,\ 2t+1)$$
$$\gamma'(1) = (1, 3)$$

retta tg. nel punto $\gamma(1)$ = la retta che passa per $\gamma(1) = (1,2)$ con direzione $(1,3)$

forma parametrica $r: (1,2) + s\,(1,3)$, $s \in \mathbb{R}$

Funzioni di più variabili

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}$

Analisi in più variabili

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Def Una funzione è una terna di oggetti

A

Ω, B, f

ove Ω, B insiemi

"più variabili"

- Ω si dice DOMINIO, $\boxed{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n}$
- B si dice CODOMINIO, $B \subseteq \mathbb{R}$
- f è una legge che lega gli elementi di Ω a quelli di B

$f: \Omega \to B$ mette in corrispondenza ogni elemento di Ω con un solo elemento di B

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \underbrace{x^2 - y + xy}$

$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = \underbrace{x+z} \quad \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R}$

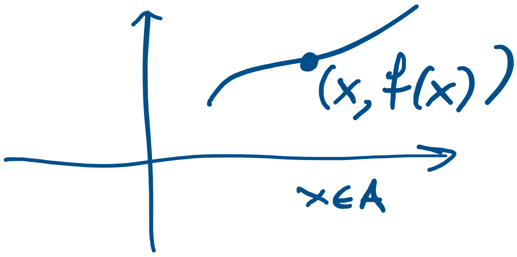
Analisi funzioni

$f: A \to \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$\text{Grafico } f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, \; y = f(x) \right\}$

linea nel piano $\mathbb{R}^2$



Analisi in 2 variabili

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

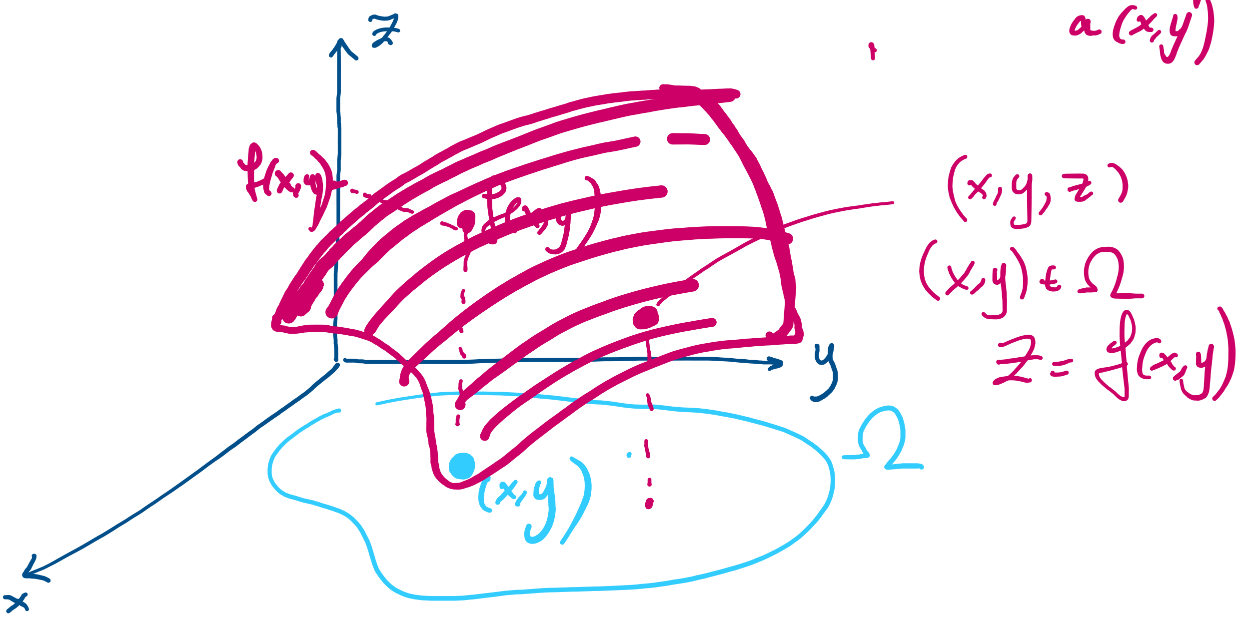
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \qquad f(x,y)$

$\text{Grafico } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in \Omega}_{\text{vivono nel piano } xy}, \; \underbrace{z = f(x,y)}_{\text{quota}} \}$

superficie nello spazio

quota (altezza a cui si trova del punto della superficie che sta sopra a (x,y))



OSS: dominio = il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dove è definita (ha senso scrivere) la funzione

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

grafico di f = $\{ (\underbrace{x}_{x \in \mathbb{R}^n \text{ (vettore)}}, \underbrace{y}_{y \in \mathbb{R} \text{ (numero)}}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, y = f(x) \}$

Insieme di livello

($n=2$ → linee di livello)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Def Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ (pensato come quota) l'insieme di livello corrispondente a λ è

$$\boxed{\{ \underline{(x,y) \in \mathbb{R}^2} : f(x,y) = \lambda \}}$$

INSIEME di livello λ per f

insieme dei punti in $\mathbb{R}^2$ t.c. la quota di f in questi punti $= \lambda$

↳ sottoinsieme dello spazio di partenza

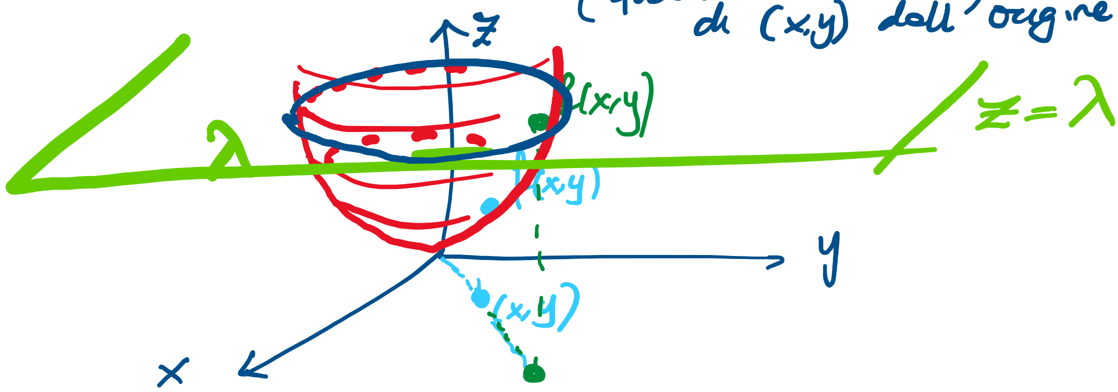
esempio

$f(x,y) = x^2+y^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x^2+y^2$

(quadrato della distanza di (x,y) dall'origine)

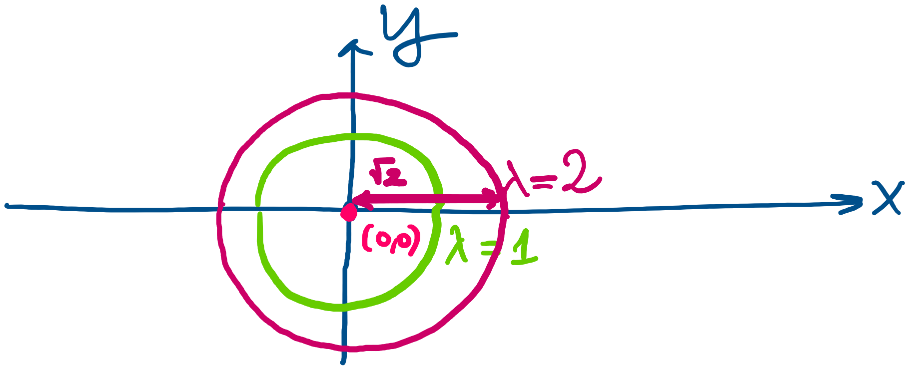


Chi sono gli insiemi di livello?

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} = \lambda\} \rightarrow$ interseco il grafico di f con il piano $z=\lambda$ e poi proietto sul piano xy

- se $\lambda < 0 \rightarrow \emptyset$
- se $\lambda = 0 \rightarrow (0,0)$
- se $\lambda > 0 \rightarrow$ trovo la circonferenza con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



$\underset{0}{x^2}+\underset{0}{y^2}=0 = \lambda$

$\lambda=1 \rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{x^2+y^2=1}\}$

$\lambda=2 \rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2\}$

sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

Insieme di livello λ = {punti di $\mathbb{R}^2$ t.c. in questi punti la funzione $=\lambda$}

esempio

$f(x,y) = x \cdot y$

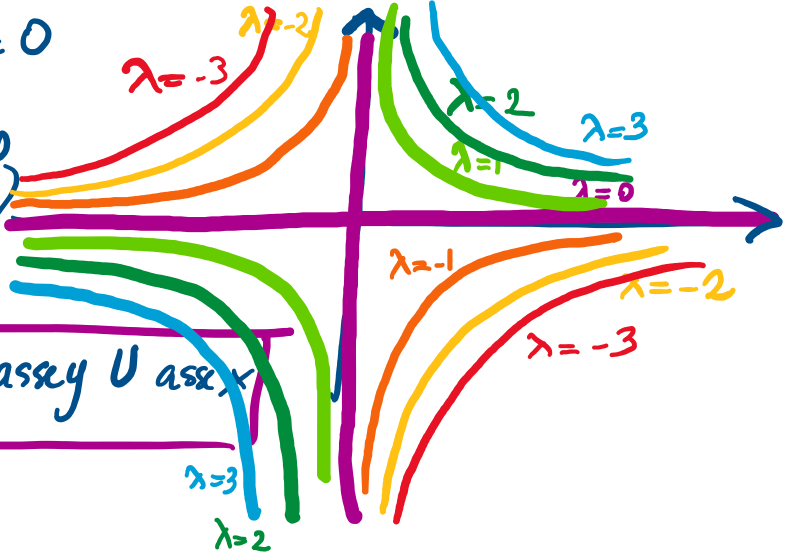
Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello λ

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \lambda\} \subseteq \mathbb{R}^2$

• se $\lambda = 0$: $xy = 0$

$\Updownarrow$

$x = 0$ (asse y) o $y = 0$ (asse x)



$$\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} = \text{asse } y \cup \text{asse } x}$$

• se $\lambda > 0$,

$$\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \lambda\}}$$

$y = \frac{\lambda}{x}$

iperboli equilatere nel 1° e 3° quadr.

$y = \frac{1}{x}$

• se $\lambda < 0$

$$\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \lambda\}}$$

$y = \frac{\lambda}{x}$ $\lambda < 0$

iperboli equilatere nel 2° e 4° quadr.

esempio

$f(x,y) = |x+y|$

insiemi di livello λ, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 \supseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| = \lambda\}$

valore assoluto

• $\lambda < 0 \to \emptyset$

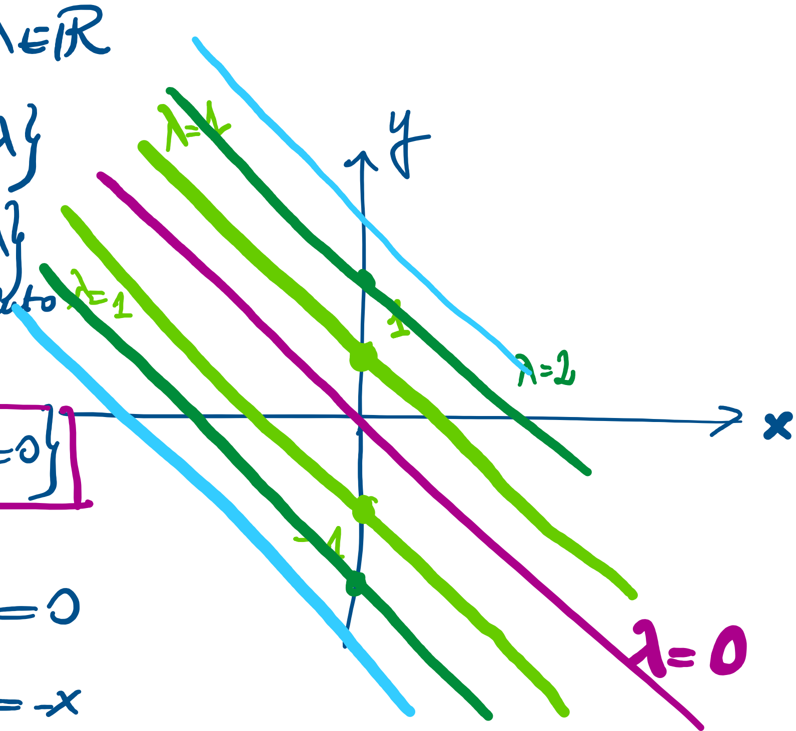
• $\lambda = 0 \to$ $\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| = 0\}}$

$\Updownarrow$

$x + y = 0$

$\Updownarrow$

$y = -x$



• $\lambda > 0 \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| = \lambda\}$

1) $\hookrightarrow x+y > 0 \to y = \lambda - x$

2) $\hookrightarrow x+y < 0 \to -x-y = \lambda$

$y = -x - \lambda$

1) $y > -x \to y = \lambda - x$

2) $y < -x \to y = -x - \lambda$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| = \lambda\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{array}{l} y = \lambda - x \\ y > -x \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l} y = -x - \lambda \\ y < -x \end{array}\right\}$$

$\lambda > 0$

$\lambda = 1 \longrightarrow y = 1 - x$

$\longrightarrow y = -1 - x \quad y < -x$

$\lambda = 2$

$\lambda = 3$