Esercitazione 22/02

1. Norma del vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ è

$$\sqrt{3^2+2^2+5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38} \qquad (d)$$

2. Ortogonale a $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ tra :

(a) ? $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Vediamo se il prodotto scalare è 0.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = (-4)\cdot 4 + (1)\cdot(-1) + 5\cdot(-5) =$$
$$= -16-1-25 \neq 0 \,. \Rightarrow \text{non sono ortogonali.}$$

(b) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 5$$
$$= -1-1+1 = -1 \neq 0 \quad \text{NO}$$

(c) $$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix} = (-4)(-5) + 1\cdot 20 + 5\cdot(-8) =$$
$$= +20+20-40 = 0 \,. \quad \text{SÌ}$$

Risposta (c).

3. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \text{ sono ortogonali?}$$

Imponiamo che il prodotto scalare sia $= 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot\alpha + 1\cdot\alpha^2 + 0\cdot(\alpha+1) =$$
$$= -\alpha + \alpha^2$$

Voglio trovare gli α t.c. $-\alpha+\alpha^2 = 0$.

Le soluzioni sono $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

(e questi sono tutti i soli i valori di α per cui i due vettori sono ortogonali)

(d).

4. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 < 4\}$.

Il punto $(0,2,-3)$ e' interno/esterno ... ?

Cosa rappresenta $(x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 < 4$?

E' la sfera di centro $(1,0,4)$ e raggio 2.

(Infatti $(x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2$ e' (il quadrato del) la distanza tra il punto (x,y,z) e il punto $(1,0,4)$)

Equazione della superficie sferica di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio r e'

$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$, che di solito si riscrive come $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

La disequazione $(x-1)^2+y^2+(z-4)^2<4$ descrive la sfera "piena" di centro $(1,0,4)$ e raggio 2, tolto il "bordo".

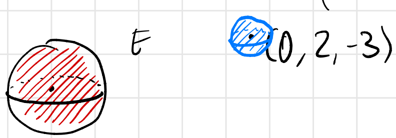
Per capire se $(0,2,-3)$ sta dentro o fuori sostituiamo nella disequazione. Troviamo

$$(-1)^2+2^2+(-7)^2<4 \quad ?$$

$$1+2+49<4 \qquad \underline{NO}$$

Quindi il punto sta fuori dalla sfera, e non è nemmeno sul bordo.

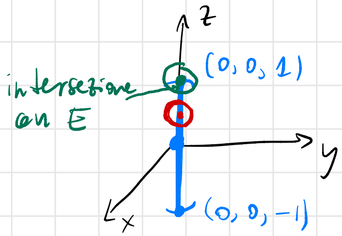
Quindi è un punto <u>esterno</u> ad E. ((d)).



posso trovare una palla aperta centrata in $(0,2,-3)$ che non interseca l'insieme E.

5. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x=y=0 \text{ e } -1<z<1\}$

L'insieme E è chiuso e/o aperto?



E è l'intervallo $(-1,1)$ sull'asse z.

Sicuramente non è aperto, perché non è vero che dato qualsiasi suo punto, c'è tutta una palla di $\mathbb{R}^3$ contenuta in E.

È chiuso? NO, perché non contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

(i punti $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ sono di accumulazione, ma non sono punti di E).

Si può anche dire che il complementare E^c non è aperto. Infatti ad esempio $(0,0,1) \in E^c$, e non c'è nessuna palla di $\mathbb{R}^3$ di centro $(0,0,1)$ e tutta contenuta in E^c. ((d)).

(in questo caso $\partial E = E \cup \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$, e $\mathring{E} = \emptyset$)

6. Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ non vuoti con A aperto e B chiuso, allora $A \setminus B$ è aperto e/o chiuso?

Si ha $A \setminus B = A \cap B^c$ sono i punti

che stanno in A e non in B
nel complementare di B

B è chiuso $\Rightarrow B^c$ è aperto

e quindi $A \cap B^c$ è aperto perché è intersezione di due aperti. ((d)).

7. $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ non limitati.

$A \cup B$ non è mai limitato ?
indipendentemente da A, B, sapendo solo che non sono limitati.

È vero, perché l'unione $A \cup B$ contiene sia A che B, quindi per forza è non limitata.

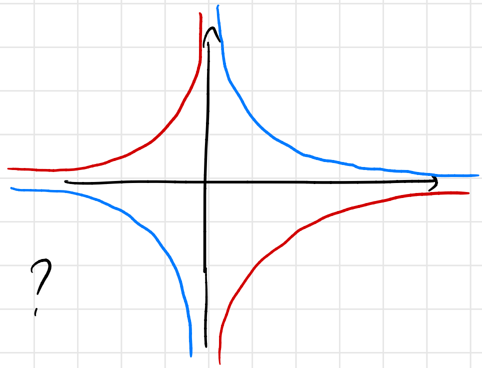
(questo rimane vero anche se solo uno tra A e B è non limitato).

8. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1\}$.

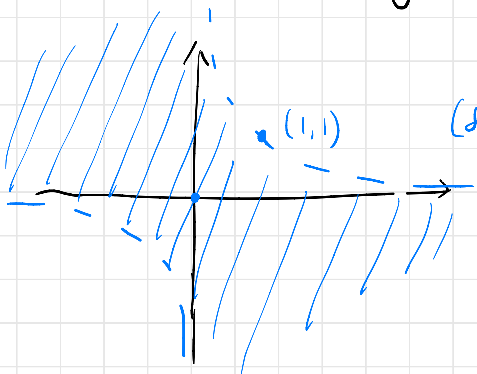
La disuguaglianza $|xy| < 1$ equivale a $-1 < xy < 1$

Cosa descrivono $xy=1$ e $xy=-1$?

Descrivono le iperboli

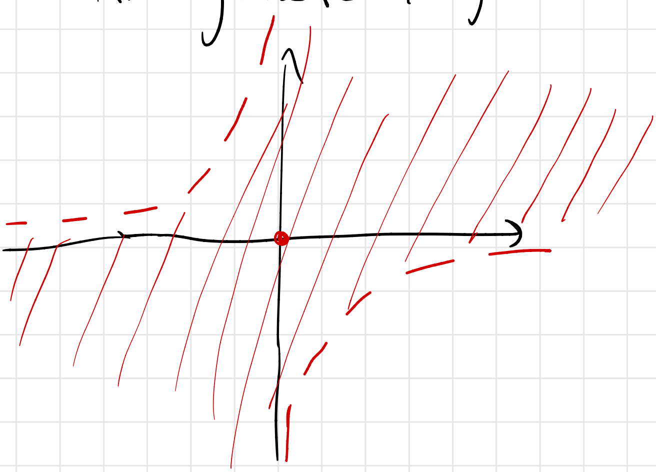


Cosa descrive $xy<1$?

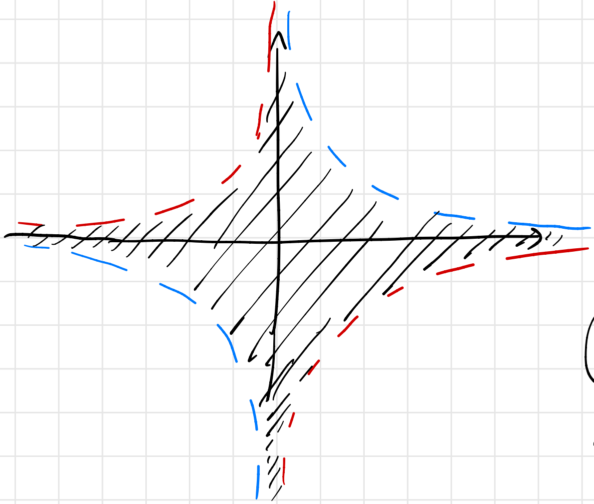


(senza bordo)

Analogamente $-1<xy$ descrive



La disuguaglianza $-1<xy<1$ descrive l'intersezione dei due insiemi, cioè

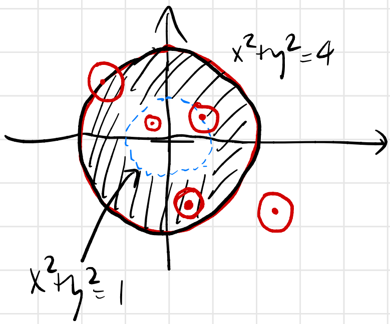


L'insieme non è limitato, ad esempio contiene tutto l'asse x.

(i punti della forma $(x,0)$ soddisfano $|xy| < 1$)

9. Chi è la frontiera di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$?

L'insieme è la corona circolare compresa tra le circonferenze $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$

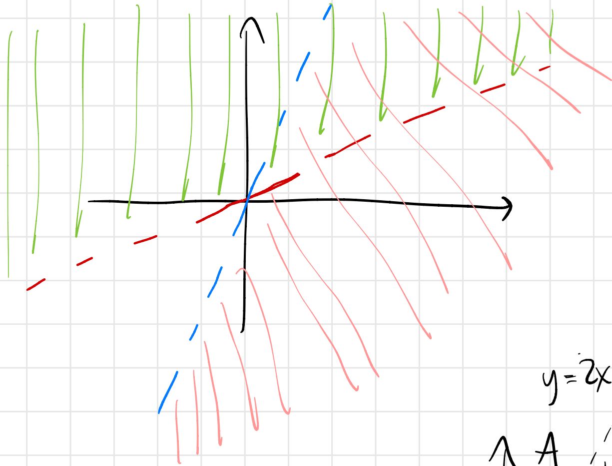


∂E = unione delle due circonferenze di bordo.

((c))

10. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{2} < y < 2x\}$.

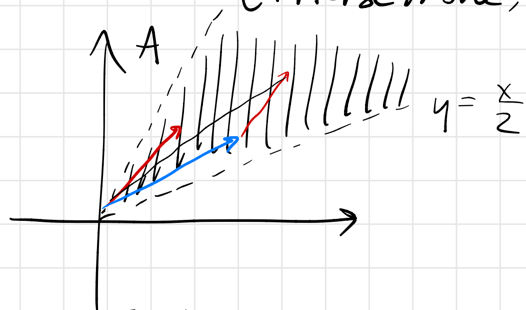
Chi è A? $y = \frac{x}{2}$ e $y = 2x$ descrivono due rette



$y > \frac{x}{2}$

$y < 2x$

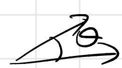
L'insieme A è l'intersezione, quindi



La risposta è (c). Dati due punti qualsiasi (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in A$, l'angolo compreso tra i vettori è $< \frac{\pi}{6}$, e quindi $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) > 0$.

$$= \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cdot \cos\theta$$

angolo (più piccolo) tra i 2 vettori

(si possono anche prendere due elementi espliciti  di A, tipo: $(3,2)$ e $(2,3)$ stanno in A, e $(3,2)\cdot(2,3) = 3\cdot 2 + 2\cdot 3 = 12 > 0$)

(oppure: visto che A è tutto nel primo quadrante, se (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in A \Rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$

$\Rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 > 0.$)

11 · $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Piano per questi tre punti.

- usare la formula, oppure
- $ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ da determinare.

Imponiamo il passaggio per i tre punti

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ R \end{array} \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = d \\ a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot (-1) = d \\ a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot (-1) = d \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c = d \\ a + 2b - c = d \\ 2a - c = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = d \\ a + 2b = 2d \longrightarrow d + 2b = 2d \Rightarrow b = \frac{d}{2} \\ 2a = 2d \rightsquigarrow a = d \end{cases}$$

Ora scelgo $d = 1$, trovo $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = 1$.

Il piano dovrebbe essere $x + \frac{y}{2} + z = 1$.

Si controlla che passa per i 3 punti

sostituendo le coordinate.

(il valore che date a d non importa, trovate un'equazione diversa dello stesso piano.
Prendendo $d=2$ veniva $a=2$, $b=1$, $c=2$
e $2x+y+2z=2$)

12. Piano passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Qualsiasi piano perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
ha equazione $\overset{a}{1}x + \overset{b}{2}y \overset{c}{-1}z = d$

per un qualche $d \in \mathbb{R}$.

Devo trovare d in modo che il piano passi per $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Impongo il passaggio e ricavo d:

$$0+2\cdot 2-1=d \longrightarrow d=3$$

L'equazione è $x+2y-z=3$.