Limiti per funzioni di 2 o più variabili

2 variabili

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato

$$\underbrace{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2} f(x)}_{?}$$

↳ ci sono 4 possibilità:

1. limite esiste ed è finito
2. limite esiste ed è $= +\infty$
3. limite esiste ed è $= -\infty$
4. limite non esiste (né 1, né 2, né 3 valgono)

Def. 2 $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad n$

Si dice che

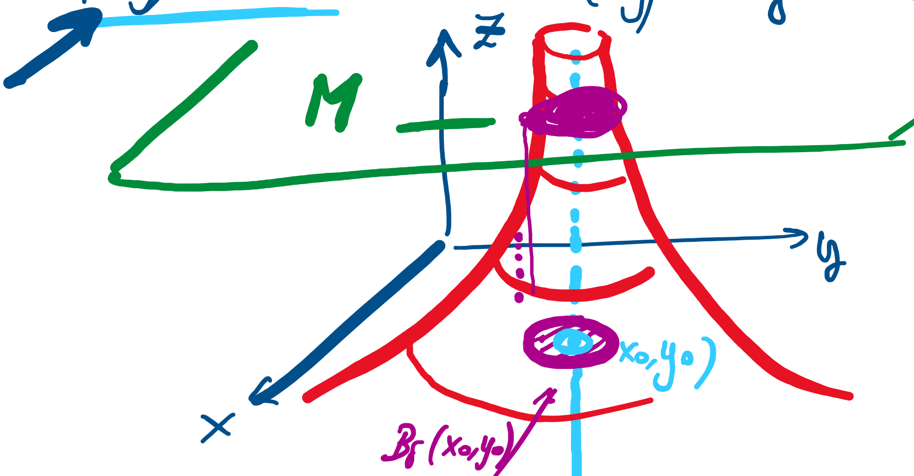
$$\boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty}$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande) $\exists \quad > 0$ t.c.

$f(x,y) \geq M \qquad \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$



Def 3

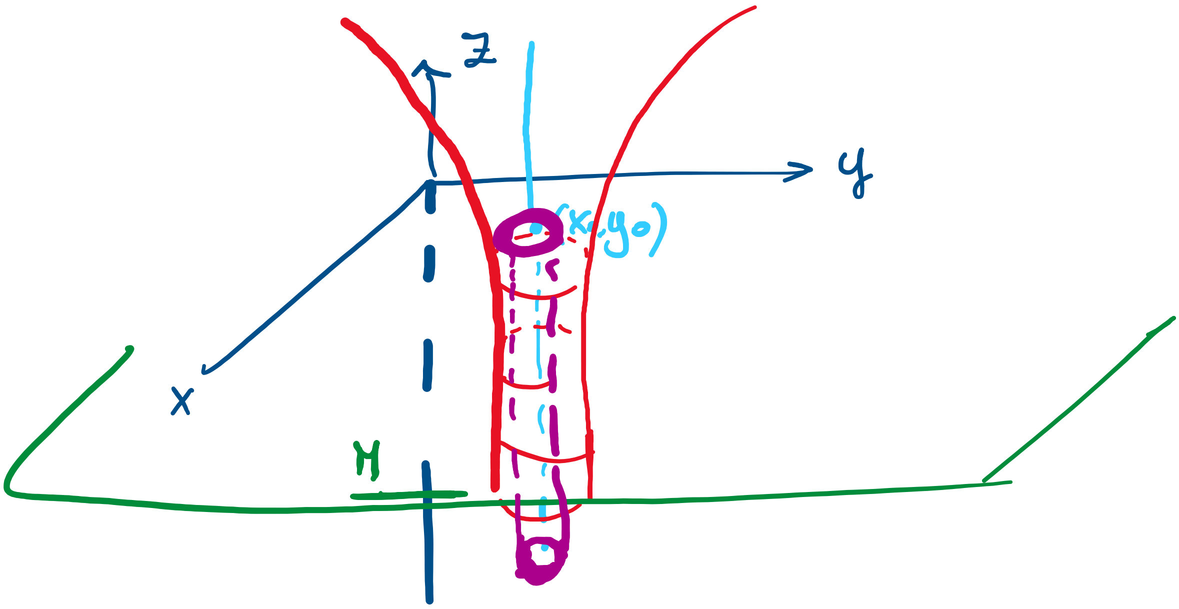
si dice che

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty}$$

se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x,y) \le M \qquad \forall (x,y) \in B_\delta((x_0,y_0)) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$



Def 1

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

si dice che

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to\underline{(x_0,y_0)}} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}} \quad \text{se}$$

$\forall\, \underline{\varepsilon > 0}$ (anche molto piccolo) $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x,y) - \ell| \le \varepsilon \qquad \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

valore assoluto

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, \dots, x_n)$

Definizione (CONTINUITÀ)

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice CONTINUA in punto $\underbrace{x_0}_{\text{vettore}} \in \mathbb{R}^n$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore

Definizione

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}^n$ se è continua $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$

Regola ogni funzione ottenuta a partire dalle funzione elementari usando operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non presenta problemi di "esistenza" (logaritmi (≤ 0), radice (≤ 0), denominatore si annulla)

OSS Gli strumenti standard del calcolo dei limiti studiati nell'Analisi finora continuano ad essere validi per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

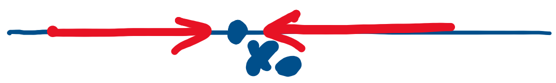
- unicità limite
- somma, prodotto, quoziente
- teorema dei carabinieri
- permanenza del segno
- confronto
- ⋮

Analisi in una variabile	Analisi in più variabili
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad x\in\mathbb{R}$	$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $x_0\in\mathbb{R}^n$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$
se $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0$ t.c.	se $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ t.c.
valore assoluto $\forall x: \boxed{\underline{|x-x_0|<\delta}}$ $x\neq x_0$ vale	norma $\forall x: \boxed{\|x-x_0\|<\delta}$, $x\neq x_0$ vale
$\lvert f(x)-L\rvert \le \varepsilon$	$\lvert f(x)-L\rvert \le \varepsilon$

$\forall x \in B_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$

$\forall x: \|x-x_0\| < \delta$

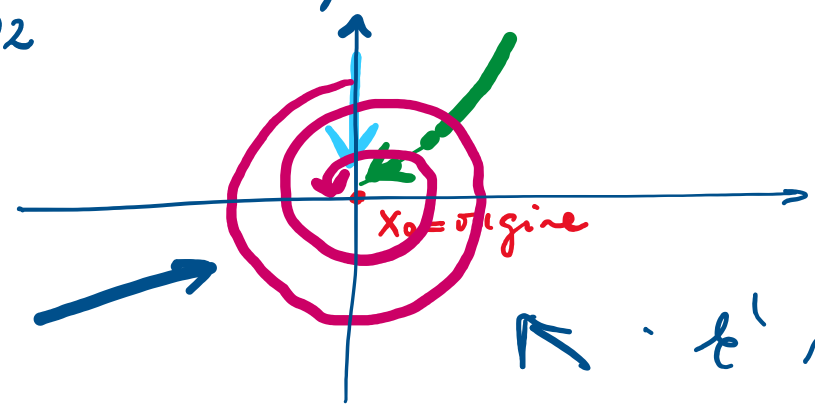
<u>OSS</u> Anche se la struttura della definizione di limite rimane inalterata (valore assoluto → → norma), il calcolo dei limiti per funzioni di più variabili è molto più complicato



In $\mathbb{R}$ x tende ad un punto x_0 lungo una direzione fissata

In $\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$ può tendere ad un punto $x_0\in\mathbb{R}^n$ con n gradi di libertà

Es $\mathbb{R}^2$



↖ · è molto più difficile verificare la def. di limite esempi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y), (0,0) \in \mathbb{R}^2$

1) $$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}}$$

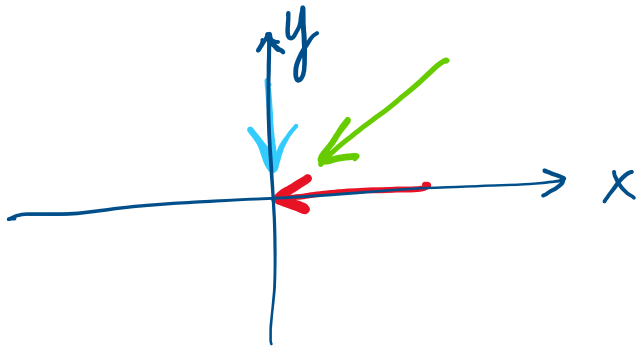
$(x_0,y_0) = (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

"Esistono diversi modi di avvicinarsi a $(0,0)$"

Se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = L \in \mathbb{R}$, allora

il limite (per sua unicità) non deve dipendere dalla direzione di avvicinamento a $(0,0)$

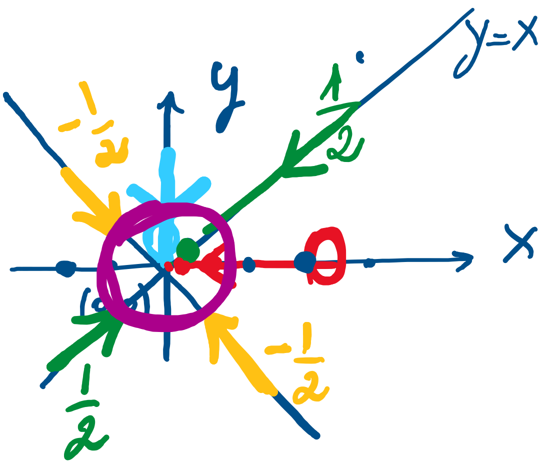


$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \nexists \quad \text{(non esiste)}$$

↳ a seconda della direzione di "avvicinamento" il limite cambia

$\Downarrow$ unicità del limite

$\nexists$ limite



• lungo l'asse x : $y = 0$

$f(\underline{x}, \underline{0}) = 0 \leftarrow$

↑ guardo la funzione f solo sui punti dell'asse x

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

• lungo l'asse y : $x = 0$

$\rightarrow f(0,y) = 0 \leftarrow$ guardo la funzione solo sui punti dell'asse y

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$$

• lungo la bisettrice $\underline{y = x}$

$\rightarrow f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \leftarrow$ guardo la funzione solo sui punti t.c. $y = x$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0} f(x,x)}_{\text{tendo all'origine lungo la bisettrice}} = \frac{1}{2}$$

Ho trovato almeno <u>2 direzioni di avvicinamento</u> (asse x e la bisettrice $y = x$) che mi danno 2 limite diversi (0 e $\frac{1}{2}$)

$\Downarrow$ il limite se esistesse sarebbe unico

limite <u>non esiste</u>

In ogni palla di centro $(0,0)$ trovo punti in cui f vale 0 e punti in cui f vale $\frac{1}{2}$

$\longrightarrow$ Il limite non esiste

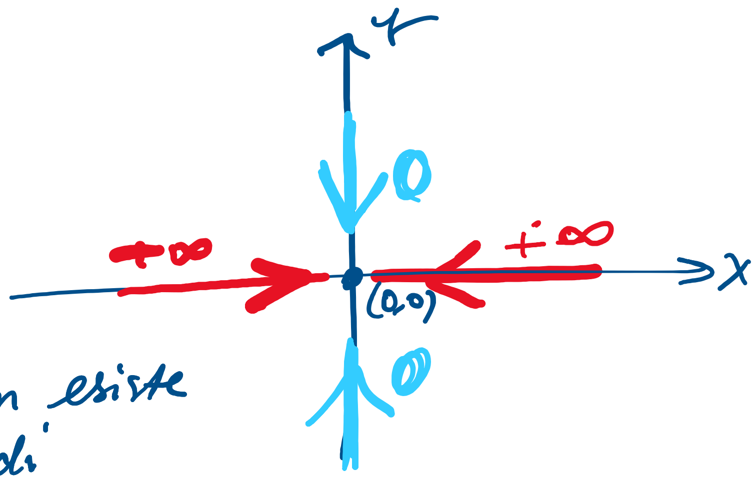
Come dimostro che un limite non esiste?
È sufficiente trovare due direzioni di avvicinamento in cui il limite è diverso.

In $\mathbb{R}^n$: i limiti in più variabili spesso non esistono

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$

$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

non esiste



Per dimostrare che non esiste cerco due direzioni di avvicinamento all'origine $(0,0)$ con due limiti diversi:

- Lungo l'asse x : $y=0$

↳ guardo la funzione

$$f(x,0) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = +\infty$$

- Lungo l'asse y : $x=0$

↳ guardo la funzione

$$f(0,y) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

Bastano queste due direzioni con limite diverso per concludere che il limite non esiste!

Attenzione: se trovo diverse direzioni e mi viene sempre lo stesso limite

↓

NON BASTA per concludere che il limite esiste

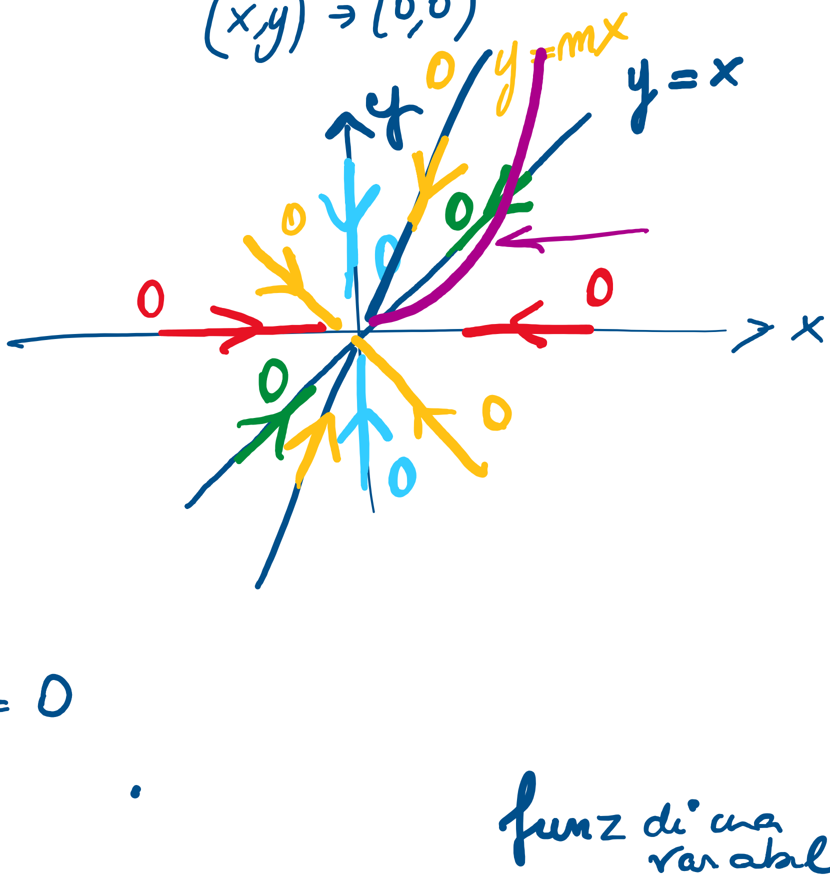
↓

perché potrebbe esserci una direzione che mi da limite diverso

Esempio

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$



- lungo asse x: $y=0$

$$f(x,0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$$

- lungo asse y: $x=0$

$$f(0,y)=0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$$

funz di una variabile

- lungo $y=x$:

$$f(x,x)=\frac{x^2\cdot x}{x^4+x^2}=\frac{x^3}{x^4+x^2}=\frac{x}{x^2+1}\xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x,x)}=0$$

• lungo $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+m^2)}$$

$$= \frac{mx}{x^2+m^2} \leftarrow$$ funz. di una variabile

Qualunque sia $m \in \mathbb{R}^2$

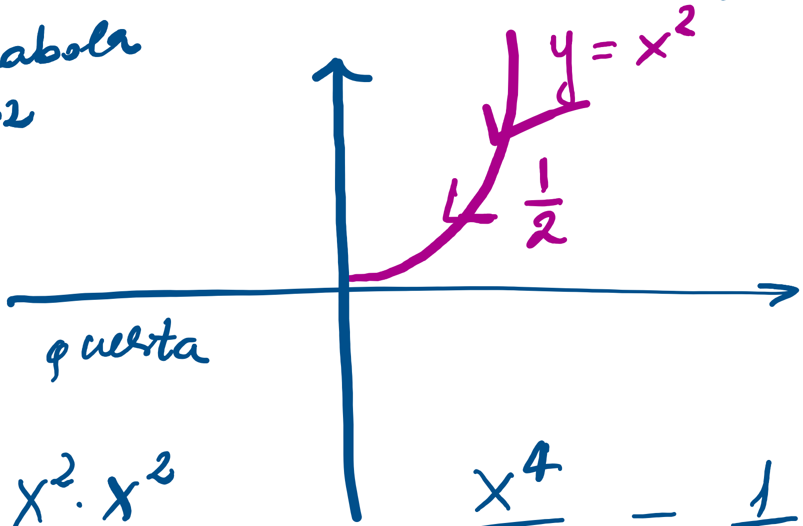
$$\lim_{x \to 0} \frac{m \cdot x}{x^2+m^2} = 0$$

Lungo tutte le direzioni di avvicinamento il limite è 0.

$\downarrow$

NON basta a concludere che il limite esiste

Infatti immaginiamo di avvicinarci all'origine lungo la parabola $y = x^2$



$\swarrow$

Restringiamo f a questa parabola

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0$$

esempi di calcolo del limite

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^6}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

forma indeterminata

$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot y^6}{x^2+y^2} = y^6 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq y^6$$

≤ 1

perché denominatore $\geq$ num

$$0 \leq f(x,y) \leq y^6$$

$(x,y)\to(0,0)$: 0 ; $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow y \to 0$: 0

$\Downarrow$ $\boxed{\text{Teorema dei carabinieri}}$

vale anche in $\mathbb{R}^2$

Per teorema dei carabinieri posso concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

2) $* = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \dfrac{0}{0}$: forma indet.

?

→ usare un $\boxed{\text{cambio di variabili}}$ ←

Pongo $t = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$

Quando $(x,y)\to(0,0)$, ho che $t\to 0$, quindi riscrivo il limite

$$* = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t}}_{\text{limite in una variabile}} = 1 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

$f(x,y) = \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}$ non posso dire che $f(x,y) \geq 0$

Regola del valore assoluto

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Se } |f(x,y)| \to 0 \text{ allora anche } f(x,y) \to 0}$

$$\left(-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)| \right)$$

$-|f(x,y)| \to 0$, $\quad |f(x,y)| \to 0$

$-|a| \leq a \leq |a|$

Applichiamolo al nostro caso

$$f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}$$

$$\downarrow$$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}\right| = |y| \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\geq 0}$$

$$0 \leq |f(x,y)| = |y| \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |y|$$

$(x,y) \to (0,0)$ $\quad$ $y \to 0$

$0 \qquad\qquad 0$

Teorema dei carabinieri

$$|f(x,y)| \longrightarrow 0$$

$\Downarrow$ Regola del valore assoluto

$$f(x,y) \to 0$$

$\uparrow$

Metodo delle coordinate polari in $\mathbb{R}^2$

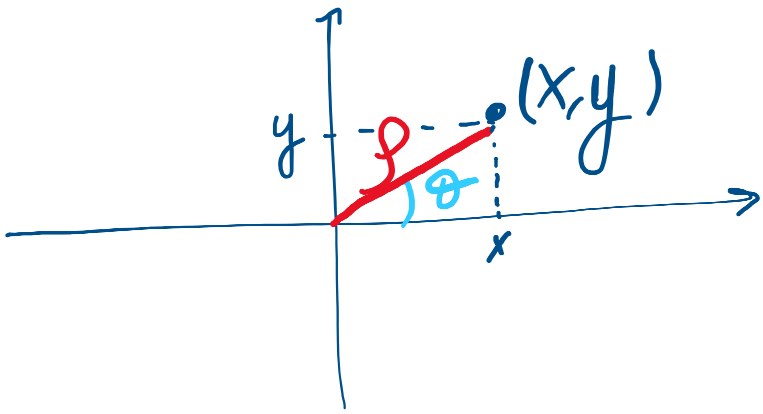
$\hookrightarrow$ facilita il calcolo dei limiti in $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ coordinate cartesiane

$\downarrow$

(ρ, θ) coordinate polari $\rho \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$



Vantaggio: la condizione $(x,y) \to 0$, in termini di coordinate polari diventa

$$\rho \to 0$$

Metodo

- Esprimere la funzione in termini di coord. polari

$$f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho \sin\theta}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta}$$

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$f(\rho, \theta)$

$$= \frac{\cancel{\rho^3} \cos^2\theta \cdot \sin\theta}{\cancel{\rho^2}}$$

$$= \rho \cos^2\theta \cdot \sin\theta$$

$$f(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta \cdot \sin\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)$$

$$= \underbrace{\lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^2\theta\cdot\sin\theta}_{\text{limite in una variabile}} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\theta \le 1 \\ -1 \le \sin\theta \le 1\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$-\rho \le \rho\cos^2\theta\cdot\sin\theta \le \rho$$

$-\rho \to 0$, $\rho \to 0$

per il teorema dei carabinieri: $\rho\cos^2\theta\cdot\sin\theta \to 0$

esempio

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \nexists$$

usiamo coordinate polari

$$\left.\begin{array}{l}x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\end{array}\right\}$$

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \frac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\cdot\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}$$

$$f(\rho,\theta) = \cos\theta\sin\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{} = \underline{\cos\theta\sin\theta}$$

depende da θ

$\nexists\, L \in \mathbb{R}$