1) Come calcolo le derivate parziali?

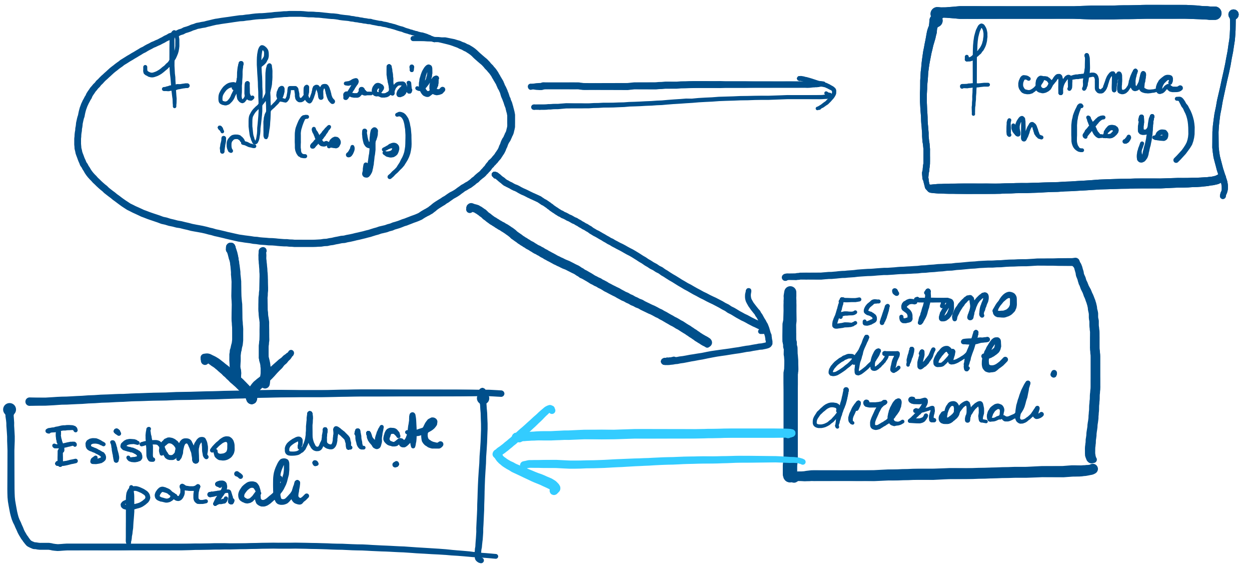
2) Come dimostro che $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0, y_0)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

3) Come calcolo le derivate direzionali?

4) Come calcolo il vettore α?

Teorema $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Risposte

4) se la funzione è differenziabile $\Rightarrow \exists$ der. parziali $\Rightarrow$

$$\alpha = \nabla f(x_0, y_0)$$

Se so fare 1-2, allora α è il gradiente di f nel punto (x_0, y_0) (vettore che ha componenti le der. parziali di f in (x_0, y_0))

3) Se so fare 1 - 2, allora le derivate direzionali nella direzione di v ($v \in \mathbb{R}^2$) sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$$

se 1) e 2) sono ok $\Longrightarrow$ $\begin{cases} 3) & \dfrac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v \\ 4) & \alpha = \nabla f \end{cases}$

Attenzione

Se f non è differenziabile, può succedere che esistano comunque le dir. direzionali ma non saranno date dalla formula $\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$

Domanda 1: come calcolo le derivate parziali?

Risposta 1: Per il calcolo delle derivate parziali usiamo le stesse regole dell'analisi finora (1D), derivando solo rispetto alla variabile che ci interessa, cioè trattando le altre variabili come fossero costanti

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad f(x_1, x_2, x_3, \dots x_k, \dots, x_n)$$

$f(x_k, \underbrace{\dots}_{\text{costanti}})$

Esempi

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

unica variabile che m'interessa

$f(x,y) = x^2 + y^3$ costante

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) \underset{(y^3 \text{ cost.})}{=} 2x$

$g(x) = x^2$

$f(x,y) = g(x) + y^3$

$f_x(x,y) = g'(x) + 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) \underset{(x \text{ costante})}{=} 3y^2$

2) $f(x,y) = x^2 \cdot y^3$

$f_x(x,y) = y^3 \cdot (2x) = 2 \cdot x \cdot y^3$

$f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$

3) $f(x,y) = \sin(xy^2)$

$f_x(x,y) = \cos(xy^2) \cdot y^2$

$f(x,y) = \sin(x \cdot C) \leftarrow$ dove $C = y^2$

$f_x = (\sin(Cx))' = \cos(Cx) \cdot C$

$f_y(x,y) = \cos(xy^2) \cdot x \cdot 2y$

$f(x,y) = \sin(\tilde{C} \cdot y^2)$

$\tilde{C} = x$ — costante

$f_y(x,y) = (\sin(\tilde{C}y^2))' = \cos(\tilde{C}y^2) \cdot \tilde{C} \cdot 2y$

$$f_y(x,y) = 2xy\cos(xy^2)$$

4) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = x \cdot e^{yz^2}$

$\to$ 3 der parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z$$

come fossero costanti

$$f_x(x,y,z) = e^{yz^2}$$

$$f_y(x,y,z) = x \cdot e^{yz^2} \cdot z^2 = xz^2 \cdot e^{yz^2}$$

costanti

$$f_z(x,y,z) = x \cdot e^{yz^2} \cdot 2zy = 2xyz\, e^{yz^2}$$

costanti

5) $f(x,y) = e^{xy} \cos y$ $\quad \frac{\partial (xy)}{\partial x} = y$

$$f_x(x,y) = \cos y \cdot e^{xy} \cdot y = y\cos y\, e^{xy}$$

costante $\quad$ costante

$$f_y(x,y) = e^{xy}(x) \cdot \cos y + e^{xy}(-\sin y)$$

costante

$$= x\cos y\, e^{xy} - \sin y\, e^{xy}$$

6) $f(x,y) = \log(1+x^2+\underbrace{y^4}_{\text{cost.}})$ $\quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^4}\cdot(2x) = \frac{2x}{1+x^2+y^4}$$

costante

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^4}\cdot(4y^3) = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}$$

costante

7) $f(x,y) = x^y$

$$f_x(x,y) = y\,x^{y-1}$$

costante $\to$ $f(x,y) = x^\alpha$ $\quad$ tratto $y=\alpha$ costante

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f_y(x,y) = x^y\cdot\log x$$

costante $\to$ $f(x,y) = a^y = e^{\log a^y} = e^{y\log a}$

$x=a$ costante

$$\left(e^{y\log a}\right)' = \underbrace{e^{y\log a}}\cdot\log a$$

$$= a^y\cdot\log a$$

$a=x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(\text{"}y=c\text{"})$$

risp. alla var. x

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(\text{"}x=c\text{"})$$

risp. alla var. y

Interpretazione geometrica

Gradiente e insiemi di livello

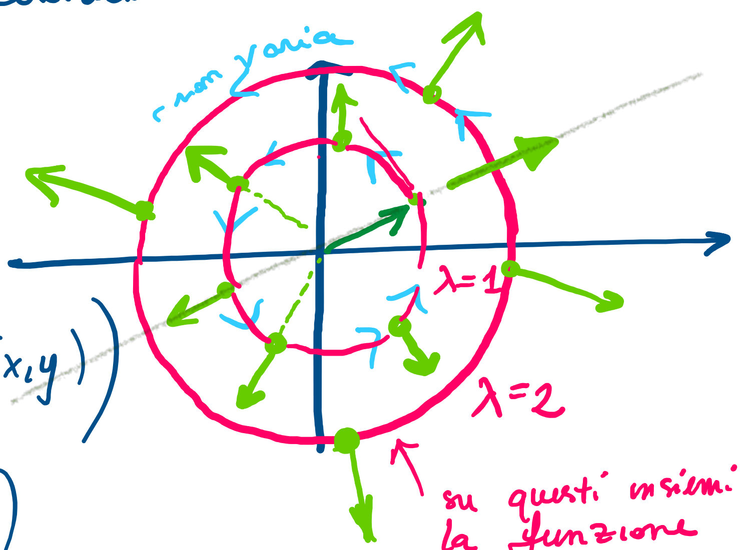
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Consideriamo $f(x,y) = x^2+y^2$

Gli insiemi (linee) di livello definiti da

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\} \quad x^2+y^2 = \lambda$$

sono circonferenze concentriche con centro nell'origine



$f(x,y) = x^2+y^2$

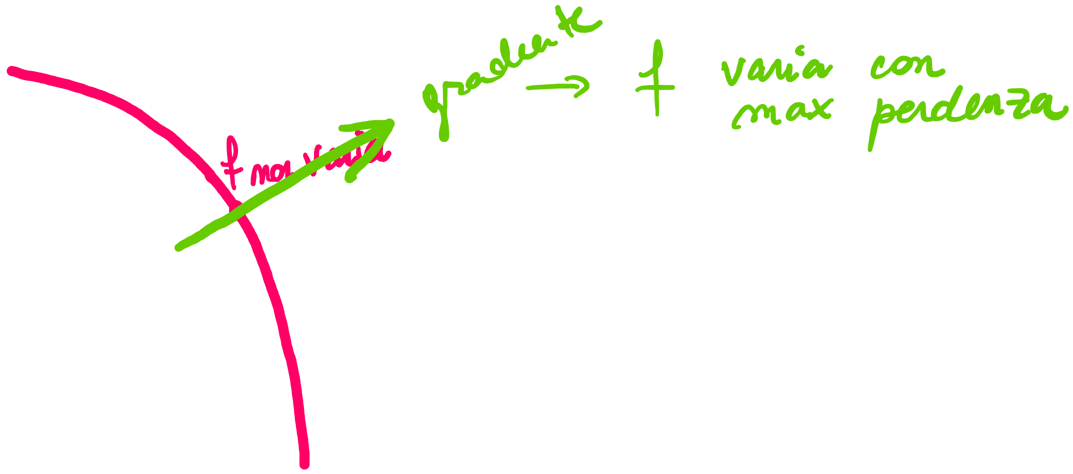
$$\underset{\in \mathbb{R}^2}{\nabla f}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x, 2y)$$

$$\nabla f(x,y) = 2 \cdot (x,y)$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Geometricamente il gradiente si rappresenta come "campo di vettori": in ogni punto del dominio disegno un vettore (il gradiente) che mi indica la direzione per salire con la massima pendenza

OSS Il gradiente è sempre perpendicolare agli insiemi di livello e punta verso i "λ crescenti"



Esercizio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - xy$ $\qquad v = (1,3)$

Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-1,2)$

$(x_0,y_0) = (-1,2)$

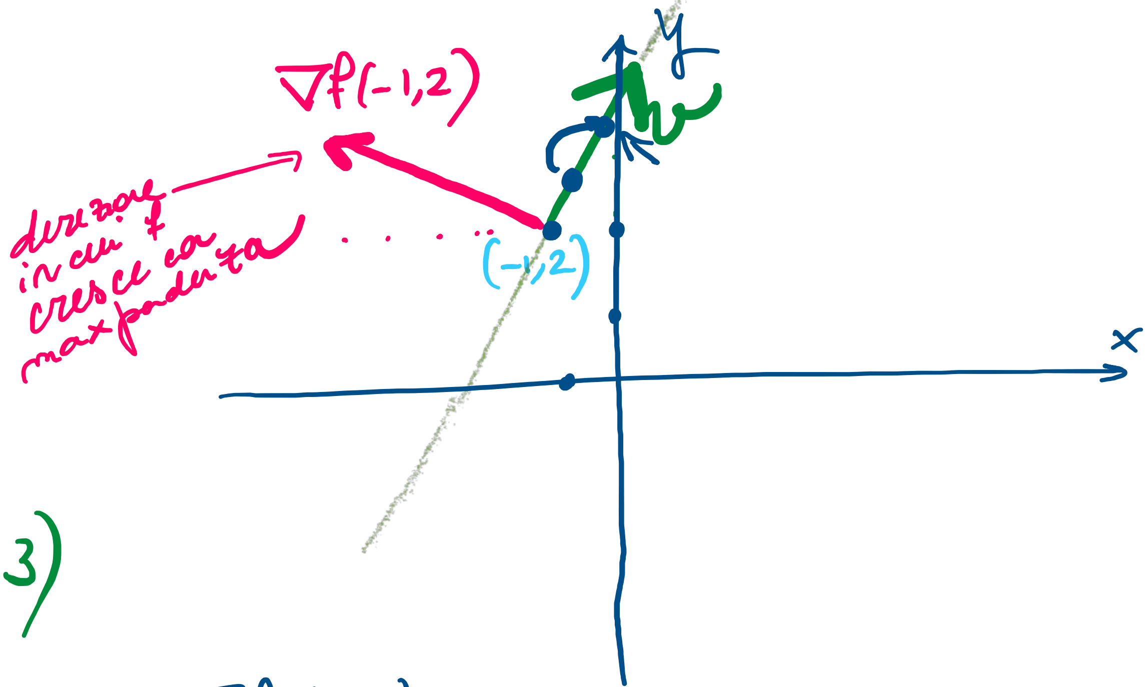
$\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\underset{\uparrow\, x_0}{2x} - y\,,\ -x\right)$

$\Downarrow$

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot v$

$\nabla f(x_0,y_0) = \nabla f(-1,2) = (-2-2\,,\ -(-1))$

$\nabla f(-1,2) = (-4, 1)$



$$v = (1,3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2) = \nabla f(-1,2) \cdot v$$

$$= (-4,1) \cdot (1,3) = -4+3 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2) = -1 < 0 \rightarrow$$ f sta scendendo

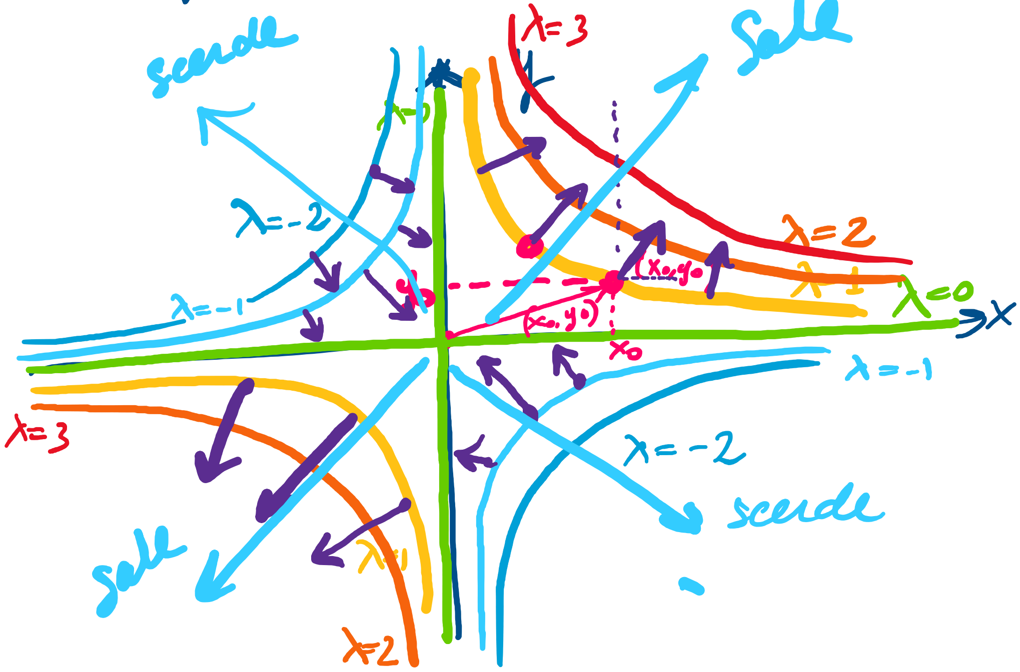
Geometricamente immaginiamoci un omino che si trova sul grafico di f nel punto corrispondente a $(-1,2)$ (il punto sul grafico $(-1,2,\underbrace{f(-1,2)}_{1+2}) = (-1,2,3)$) e si muove nella direzione di $(1,3)$ si trova a scendere

Esercizio

$$f(x,y) = xy$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Disegnare il gradiente della funzione.



$$f(x,y) = xy$$

$$\nabla f(x,y) = (y, x) \qquad \nabla f(0,0) = (0,0)$$

Insieme di livello λ

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \lambda\}$$

$$x_0 y_0 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{x_0}$$

$$\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = (y_0, x_0)}$$

Domanda 2

Come posso dimostrare che $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0, y_0)?

Risposta

Esistono 2 modi

1) usare la definizione (sconsigliato)

2) usare un teorema

Teorema del differenziale totale

Se le derivate parziali di f esistono e sono continue, allora f è differenziabile

A livello pratico: se non si incontrano problemi nel calcolare le derivate parziali, la funzione è differenziabile

3) e 4) sono ok se so fare 1) e 2)

Per 1) uso "Analisi 1D"

Per 2) uso il Teorema del differenziale totale

Max e min per funzioni di 2 (o più) variabili

Analisi 1D

Teorema di Weierstrass

Se $f: \boxed{[a,b]} \to \mathbb{R}$ è continua, allora esistono sicuramente $\max\limits_{x\in[a,b]} f$, $\min\limits_{x\in[a,b]} f$

N.B.

- a,b sono inclusi nell'intervallo → intervallo chiuso
- f continua su $[a,b]$
- max e min sono il massimo valore assunto della funzione e il minimo valore assunto dalle funzioni.
- $\underbrace{\text{Le } x}_{\text{punti}}$ in cui la funzi assume max/min si dicono PUNTI di MAX / MIN

Dove cerchiamo i punti di max/min?

1. punti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $\boxed{f'(x_0) = 0}$

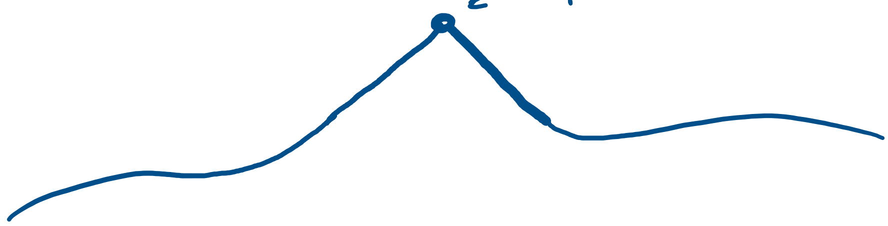
→ si dicono P.TI STAZIONARI INTERNI

↳ stazionari ⟷ annullatori della derivata prima

↳ interni ⟷ $x_0 \in (a,b)$ escluso gli estremi

② punti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste

pt. di max



→ si dicono PTI SINGOLARI INTERNI

③ punti $x_0 = a$, $x_0 = b$ → si dicono PTI DI BORDO/FRONTIERA

Metodo

- si trovano i punti di tipo ① - ② - ③
- si vanno a sostituire in f
- si controlla dove f viene massimizzata o minimizzata

OBIETTIVO: generalizzare questo procedimento a

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- continuità → $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua
- chiusura, limitatezza

$E \subset \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSO se E^c è APERTO

↓

Teorema

E chiuso $\Longleftrightarrow$ E contiene tutto ∂E
$E \subseteq \mathbb{R}^n$

"$E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se contiene tutto il suo bordo"

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c.

$$E \subseteq B_R(0)$$

Definizione

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO se è LIMITATO e CHIUSO

Es $\mathbb{R}(n=1)$ $[a,b]$ è un compatto di $\mathbb{R}$

Teorema (Weierstrass)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto.
Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono

$$\min_{x \in A} f(x) \;,\; \max_{x \in A} f(x)$$

I punti di min/max vanno ricercati nelle 3 categorie seguenti

1) PUNTI STAZIONARI INTERNI

punti interni all'insieme in cui $\boxed{\nabla f = 0}$

2) PUNTI SINGOLARI INTERNI

punti interni all'insieme in cui f non è differenziabile

3) PUNTI di BORDO $\longleftrightarrow$ punti del bordo
in più dimensioni possono essere ∞