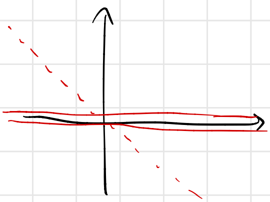
ESERCIZI 18/03

Esercizio 1: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0,\ y \neq -x\}$

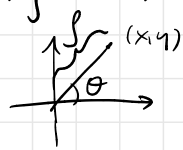
e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y^2+xy}$.



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ ?$$

(notare che Ω è proprio il dominio "massimale" di $f(x,y)$: $\quad y^2+xy = y(y+x) \neq 0$ proprio se sia $y \neq 0$ che $y+x \neq 0$ cioè $y \neq -x$.)

Usiamo le coordinate polari: $\quad (x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$



$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\sin\theta\cos\theta} =$$

$$\underset{(\rho\neq 0)}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}.$$

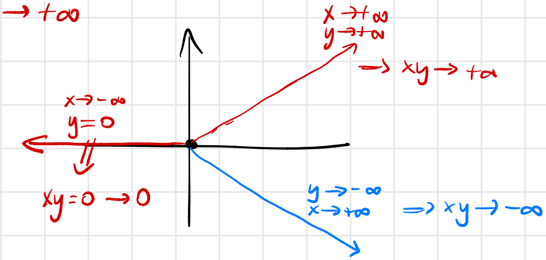
Anche mandando $\rho \to 0$, rimane una ~~es~~ essione che dipende da θ $\Longrightarrow$ il limite non esiste.

(Alternativamente, funziona anche guardare le rette $y = mx$, $\quad f(x, mx) = \dfrac{x^2+m^2x^2}{m^2x^2+mx^2} \underset{(x\neq 0)}{=} \dfrac{1+m^2}{m^2+m}$

il limite per $x \to 0$ dipende da m

$\Rightarrow$ il limite non esiste.)

Esercizio 2 : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} xy\underbrace{(x^2+y^2-4)}_{\to +\infty} = ?$



(il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$)

visto che $x^2+y^2 \to +\infty$

se $(x,y) \to \infty$ (visto che è il quadrato della distanza dall'origine)

abbiamo $x^2+y^2-4 \to +\infty - 4 = +\infty$.

Invece xy può tendere a cose diverse lungo rette diverse.

Ad esempio sulla retta $y=x$ e per $x \to +\infty$ abbiamo

$xy \to +\infty$, quindi $xy(x^2+y^2-4) \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$.

mentre sulla retta $y=-x$ e per $x \to +\infty$, abbiamo

$xy = -x^2 \to -\infty$, quindi $xy(x^2+y^2-4) \to (-\infty)\cdot(+\infty)$
$= -\infty$.

Visto che ho due curve lungo le quali i limiti sono diversi, concludo che il limite non esiste.

Alternativamente,

Con le coordinate polari:

$$f(\rho,\theta) = \rho^2 \sin\theta\cos\theta\,(\rho^2-4).$$

Mandando $\rho \to +\infty$, $\rho^2-4 \to +\infty$, e $\rho^2\sin\theta\cos\theta \to ??$

Il secondo limite dipende da θ: se $\sin\theta\cos\theta > \varepsilon > 0$ viene $+\infty$, se invece $\sin\theta\cos\theta < -\varepsilon < 0$ viene $-\infty$, se $\sin\theta\cos\theta \to 0$, allora chissà. (viene una forma indeterminata).

Visto che il limite dipende da θ, concludiamo che non esiste.

Esercizio 3: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)}{x^6+y^4} = ?$

Dominio: $(x,y) \neq (0,0)$

Osservazioni preliminari: $x^2+2y^2 \geq x^2+y^2 \longrightarrow +\infty$ quando $(x,y)\to\infty$

quindi $x^2+2y^2 \to +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2y^2} \to 0^+ \Rightarrow \log\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right) \to -\infty$

intuitivamente, anche $x^6+y^4 \to +\infty$, quindi sembra che abbiamo una forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty}$.

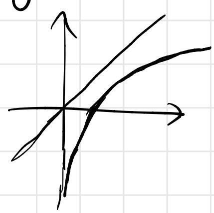
Usiamo le coordinate polari: $f(x,y) = \dfrac{\log\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)}{x^6+y^4}$

$$f(\rho,\theta) = \frac{\log\left(\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2\sin^2\theta}\right)}{\rho^6\cos^6\theta+\rho^4\sin^4\theta} = \frac{\log\left(\frac{1}{\rho^2+\rho^2\sin^2\theta}\right)}{\rho^4(\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta)} =$$

$$= \frac{\log\left(\left[\rho^2(1+\sin^2\theta)\right]^{-1}\right)}{\rho^4(\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta)} = -\frac{\log(\rho^2)+\log(1+\sin^2\theta)}{\rho^4(\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta)}$$

$$= \underbrace{-\frac{2\log(\rho)}{\rho^4}}_{\substack{\downarrow\, \rho\to+\infty \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{\left(1+\frac{\log(1+\sin^2\theta)}{\log(\rho^2)}\right)}{\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta}}_{\text{funzione limitata}} \to 0$$

Alternativa: si può usare la disuguaglianza $\log(t)\le t$



e quindi

$$\frac{\log\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)}{x^6+y^4} = -\frac{\log(x^2+2y^2)}{x^6+y^4}$$

e $$\frac{\log(x^2+2y^2)}{x^6+y^4} \le \frac{x^2+2y^2}{x^6+y^4}$$

e si vede che tende a 0 passando a coordinate polari: sostituendo (ρ,θ) come al solito troviamo $$\frac{\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2\sin^2\theta}{\rho^6\cos^6\theta + \rho^4\sin^4\theta} =$$

$$= \frac{\rho^2(1+\sin^2\theta)}{\rho^4(\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta)} = \frac{(1+\sin^2\theta)}{\rho^2(\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta)}$$

tende a 0.

$\Rightarrow$ per i carabinieri anche $\frac{\log(x^2+2y^2)}{x^6+y^4} \to 0$.

Esercizio 4 Per quale dominio Ω la funzione

$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{y^3+yx^2}$ ha limite per $(x,y)\to(0,0)$

Il dominio "massimale" e' dato da $y^3+yx^2 \neq 0$

$y(y^2+x^2) \neq 0$

cioe' $\boxed{y \neq 0}$

Proviamo a calcolare il limite con il dominio massimale.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^3+yx^2}$$. Usiamo coordinate polari:

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4\sin^4\theta}{\rho^3\sin^3\theta + \rho^3\sin\theta\cos^2\theta} = \rho\cdot\frac{\cos^4\theta+\sin^4\theta}{\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}$$

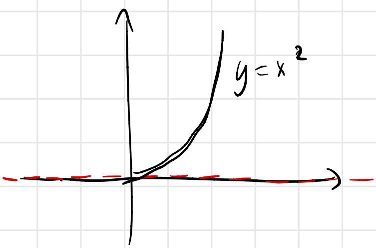
$$= \rho\,\frac{\cos^4\theta+\sin^4\theta}{\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}$$

$$= \int \frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{\sin\theta}$$

Cosa succede se $\rho \to 0$? Se θ è fissato, $\frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{\sin\theta}$ è un numero, e il limite fa 0.

(quindi lungo tutte le rette il limite esiste, ed è 0)

<u>ma</u> se θ non è fissato, può essere che $\sin\theta \to 0$, quindi il limite dipende da quanto "velocemente" $\sin\theta$ sta andando a 0 relativamente a ρ.



proviamo a vedere cosa succede andando a 0 lungo la parabola $y=x^2$.

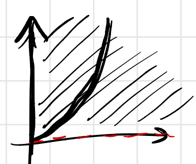
$$f(x,x^2) = \frac{x^4+x^8}{x^6+x^2x^2} = \frac{x^4+x^8}{x^6+x^4} =$$

$$= \frac{1+x^4}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

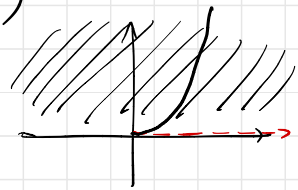
Visto che è venuto un limite diverso da quello lungo le rette, concludiamo che il limite non esiste sul dominio massimale. (escludiamo la risposta (b)).

Questo in realtà esclude anche

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y > 0\}$



(la parabola sta tutta in Ω)
per $x>0$



(d) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>0\}$

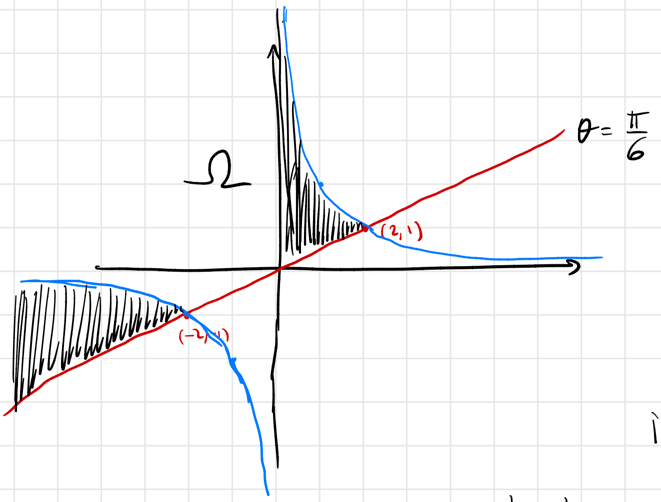
(stessa cosa).

La risposta deve essere (c).

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x}{2} < y < \frac{2}{x}\right\}$$

$y = \frac{x}{2}$

$y = \frac{2}{x}$



Questa volta $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esiste, perché (non posso più usare la parabola, e in effetti) se $(x,y)\to(0,0)$ stando in Ω, l'angolo θ non scende mai sotto $\frac{\pi}{6}$, quindi $\sin\theta \geq \frac{1}{2}$.

Quindi facendo il limite di $\rho \cdot \dfrac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{\sin\theta}$, il denominatore non può tendere a 0 (e la funzione di θ $\dfrac{\cos^4\theta+\sin^4\theta}{\sin\theta}$ è limitata), quindi il limite e' 0.

Esercizio 8 : $f(x,y) = xy(x+2y-4)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \Big(y\big(1\cdot(x+2y-4) + x\cdot 1\big), x\big(1\cdot(x+2y-4) + y(2)\big)\Big)$$

$$= \big(y(x+2y-4+x), x(x+2y-4+2y)\big)$$
$$= \big(y(2x+2y-4), x(x+4y-4)\big)$$

@ $(1,0)$, ho $\nabla f(1,0) = (0, 1\cdot(1-4)) = (0,-3)$

@ $(0,1)$ $\qquad \nabla f(0,1) = (1\cdot(2-4), 0) = (-2,0)$

@ $(1,1)$ $\qquad \nabla f(1,1) = (1\cdot(0), 1\cdot(1)) = (0,1)$

@ $(0,0)$ $\qquad \nabla f(0,0) = (0,0)$

il vettore con norma più grande qui e' $(0,-3)$.

(commento a margine
il teorema del differenziale totale si applica
e assicura che f e' differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$)

Esercizio 6 : $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(x-y)$ $\quad v = (1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = ? \qquad \left(= \nabla f \cdot v \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \sin(x-y) + (x^2+y^2)\cos(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \sin(x-y) + (x^2+y^2)\cos(x-y)\cdot(-1)$$

e $$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot (1,1) = 2x\sin(x-y) + \cancel{(x^2+y^2)}\cos(x-y) + 2y\sin(x-y) - \cancel{(x^2+y^2)}\cos(x-y)$$

$$= 2(x+y)\sin(x-y).$$

Esercizio 7:

$$f(x,y) = \frac{x^4-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \left(\nabla f(1,0)\right)\cdot v$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3\cdot(x^2+y^2) - (x^4-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{in } (1,0) = \frac{4(1)-(1)(2)}{1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(-2y)(x^2+y^2) - (x^4-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{in } (1,0) = 0$$

$$\nabla f(1,0) = (2,0)$$

(a) $(2,0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ (b) $(2,0)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$

(c) $(2,0)\cdot(-1,0) = -2$ (d) $(2,0)\cdot(0,1) = 0.$

il numero più grande è $\sqrt{3}$.

AGGIUNTA POST-LEZIONE:

Nell'es. 3 il fatto che
$$\frac{1+\frac{\log(1+\sin^2\theta)}{\log(\rho^2)}}{\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta}$$
è una funzione limitata andrebbe giustificato.

Segue ad esempio da
$$\frac{\log(1+\sin^2\theta)}{\log(\rho^2)} \leq \log(1+\sin^2\theta) \leq \log(2)$$
(possiamo assumere che ρ sia "grande", quindi $\log(\rho^2) \geq 1$)

e $\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta \geq \cos^6\theta+\sin^4\theta$ (per lo stesso motivo)

e la funzione $g(\theta)=\cos^6\theta+\sin^4\theta : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$

ha minimo assoluto $m \in \mathbb{R}$ (per Weierstrass), che deve essere >0, visto che $g(\theta)\geq 0$ sicuramente, e $g(\theta)=0 \Rightarrow \cos\theta=\sin\theta=0$, impossibile.

Quindi
$$\frac{1}{\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta} \leq \frac{1}{m}, \quad e \quad 0 \leq \frac{1+\frac{\log(1+\sin^2\theta)}{\rho^2}}{\rho^2\cos^6\theta+\sin^4\theta} \leq \frac{1+\log(2)}{m}.$$