## Teorema (Weierstrass)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sia } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ un insieme compatto} \\ \text{Sia } f: A \to \mathbb{R} \text{ una funzione continua} \\ \text{allora esistono} \\ \max_{x\in A} f(x), \quad \min_{x\in A} f(x)\end{array}}$$

**OSS**

Non appena le ipotesi non sono verificate, allora max e min possono comunque esistere, ma non necessariamente.

Dove/come i punti di max/min?

1. P.TI STAZIONARI INTERNI → p.ti interni all'insieme dove $\boxed{\nabla f = 0}$
2. P.TI SINGOLARI INTERNI → p.ti interni all'insieme in cui $f$ non è differenziabile
3. P.TI di BORDO → p.t. di bordo dell'insieme

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

## Teorema

Se $x_0$ è punto di max/min interno ad $A$, se esistono le derivate parziali di $f$ in $x_0$, allora $\boxed{\nabla f(x_0) = 0}$

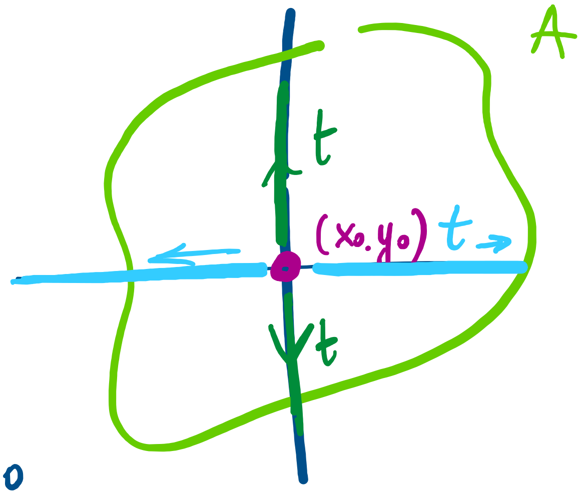
→ condizione necessaria

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Se $x_0$ è un punto $x_0 \in (a,b)$ di max/min e in quel punto $\exists f'(x_0)$ allora

$$f'(x_0) = 0$$

## Dim




$f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

- $(x_0,y_0) \in \underbrace{\mathring{A}}_{\text{punti int. di } A}$
- $(x_0,y_0)$ sia p.to di <u>minimo</u>
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ <u>esistono in $(x_0,y_0)$</u>

Tesi: $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0}$ , $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0}$

$\left( \nabla f(x_0,y_0) = 0 \right)$

Consideriamo la funzione

$$g(t) := f(x_0 + t, y_0)$$

Poiché $(x_0,y_0)$ è p.to di minimo per $f$

$\Rightarrow$ allora $g(t)$ ha un <u>minimo per $t = 0$</u>

1D

$\Updownarrow$

$(x_0,y_0)$ per $f$

Teorema $\Longrightarrow$ dell'Analisi 1D

$$g'(0) = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0}$$

Analogamente, possiamo considerare

$$h(t) = f(x_0, y_0 + t)$$

$$0 = h'(0) = \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$$

poiché $h$ ha un minimo per $t=0$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$$

Se $(x_0, y_0)$ fosse stato un max, avrei ragionato in modo analogo

---

A livello pratico → cerco pt. di min/max

PUNTI STAZIONARI INTERNI

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0$$

cond. necessaria

---

Come determiniamo max/min di funzione $f$ continua su un insieme compatto $A$

1) $\boxed{\text{intuitivamente (casi semplici)}}$

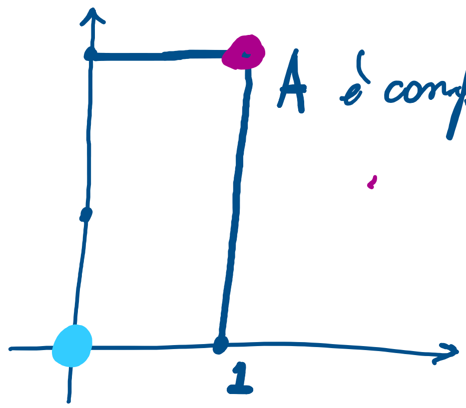
Esempio 1

$$f(x,y) = 2x + 3y$$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$$A = [0,1] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$$

$f$ continua su $A$ compatto $\Longrightarrow$ $\exists$ max $f$, $\exists$ min $f$, $x \in A$




A è compatto

• Pt. di max → punto in cui massimizzo x ax che y,

$(1,2) \rightarrow \max_{x \in A} f(x) = f(1,2) = 8$

- Pt. di min $\rightarrow$ punto in cui minimizzo sia $x$ che $y$

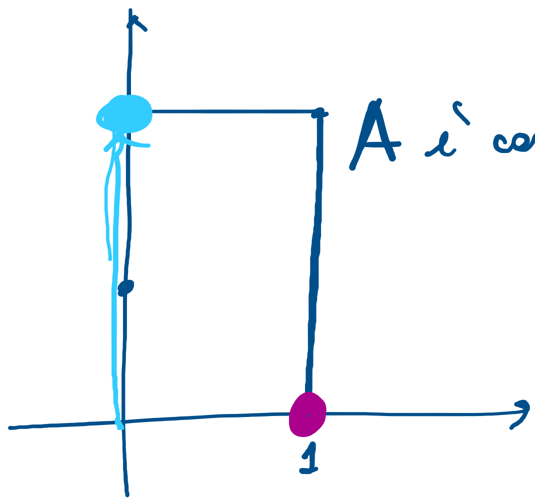
$(0,0) \rightarrow \min_{x \in A} f(x) = f(0,0) = 0$

$$\max_{x \in A} f = 8 \qquad \min_{x \in A} f = 0$$

## Esempio 2

$f(x,y) = \underline{2x - 3y}$ $\qquad A = [0,1] \times [0,2]$

su $A$ $\quad x \geq 0$
$\quad y \geq 0$




$A$ è compatto

max $\rightarrow (1,0)$

$f(1,0) = 2$

$\max_{x \in A} f(x) = 2$

$\nabla f = (2,-3)$

$\Downarrow$

$\nabla f \neq 0$

min $\rightarrow (0,2)$

$f(0,2) = -6$

$\min_{x \in A} f(x) = -6$

$(1,0)$ e $(0,2)$ sono punti di bordo

## Esempio 3

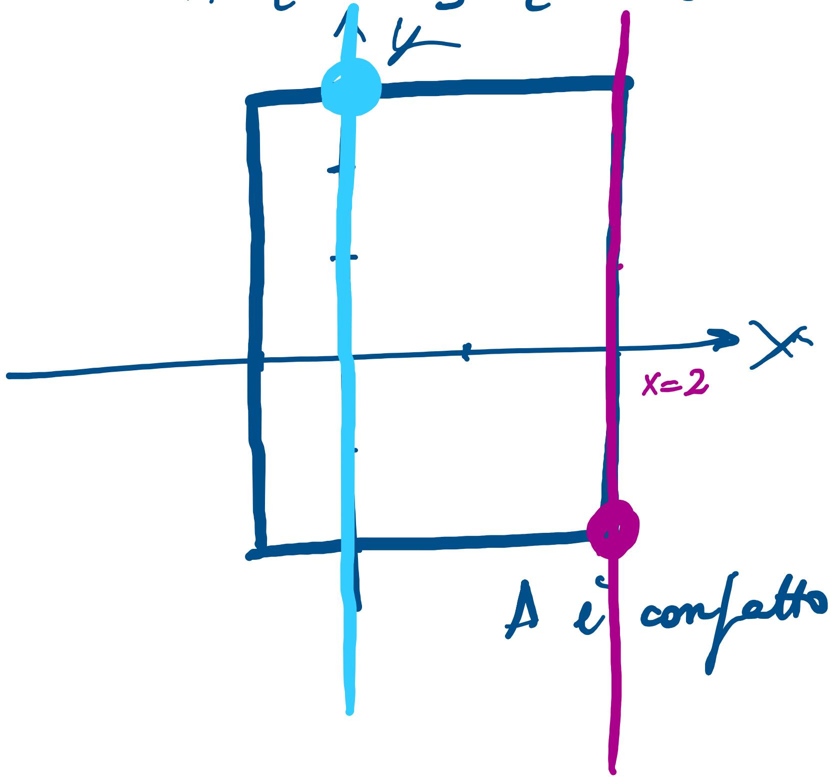
$f(x,y) = x^2 - y$

$f$ continua su $A$

$\Downarrow$ W

$\exists$ max/min

$A = [-1, 2] \times [-2, 3]$




- pt. di max

$\downarrow$

$(2, -2)$

$\downarrow$

$f(2, -2) = 6$

$$\max_{x \in A} f(x) = 6$$

- pt di min $\longrightarrow (0, 3) \longrightarrow f(0,3) = -3$

$$\min_{x \in A} f(x) = -3$$

## (2) Metodo degli insiemi di livello $\leftarrow$

## (3) Metodo classico $\rightarrow$

P.TI STAZ. INTERNI $(\nabla f = 0)$

P.TI SINGOLARI INTERNI

P.TI di BORDO

$\uparrow$

come gestire i punti di bordo?

## 2) Metodo degli insiemi di livello

**Esempio 1**

$$f(x,y) = x$$

$A =$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2 (disco)

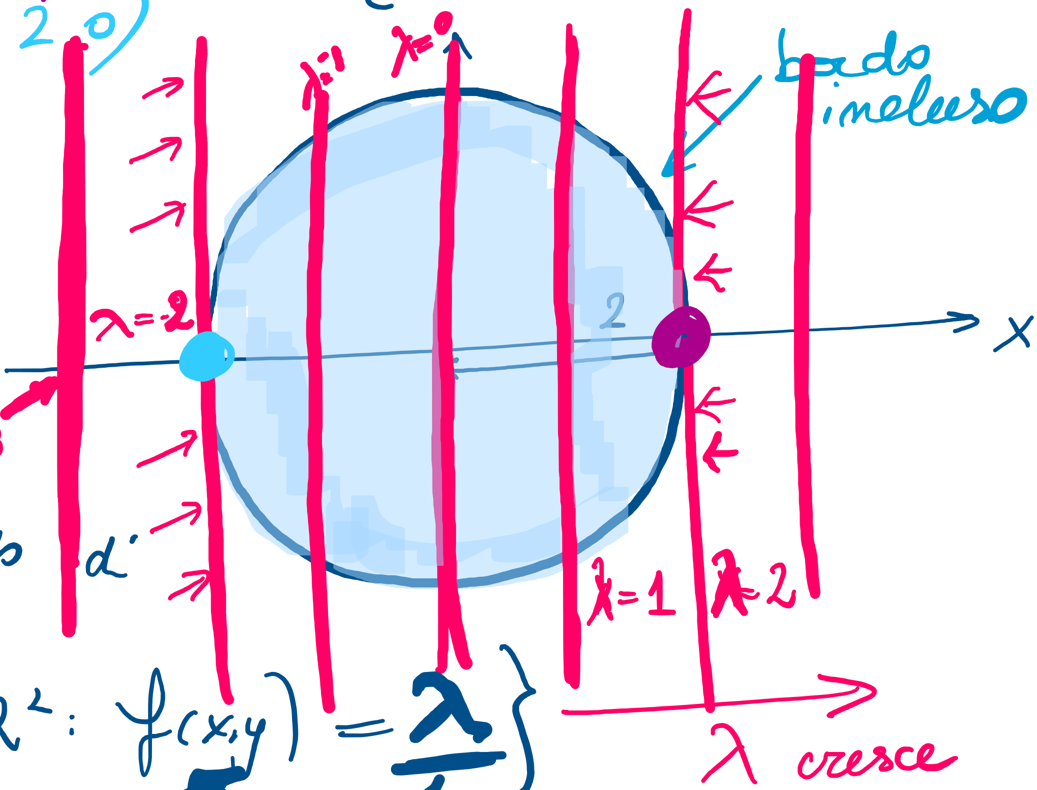
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$$

pt. di max $(2,0)$

pt di min $(-2,0)$

$$\max_{x \in A} f = 2$$

$$\min_{x \in A} f = -2$$




Le linee di livello di $f(x,y)$ sono

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda\} \longrightarrow \text{linee di livello sono rette // all'asse } y$$

→ Max di $f(x,y)$ in $A$ è il più grande $\lambda$ tale che

$$A \cap \{(x,y) : f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset$$

$$\lambda = 2 \longrightarrow \max_{x \in A} f = 2$$

→ min di $f(x,y)$ in $A$ è il più piccolo $\lambda$ tale che

$$A \cap \{(x,y) : f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset$$

$\lambda = -2 \rightarrow \min_{x \in A} f = -2$

## ② Metodo delle linee di livello

cercare il più grande e il più piccolo $\lambda$ per i quali l'insieme di livello $\lambda$ interseca $A$

**Esempio 2**

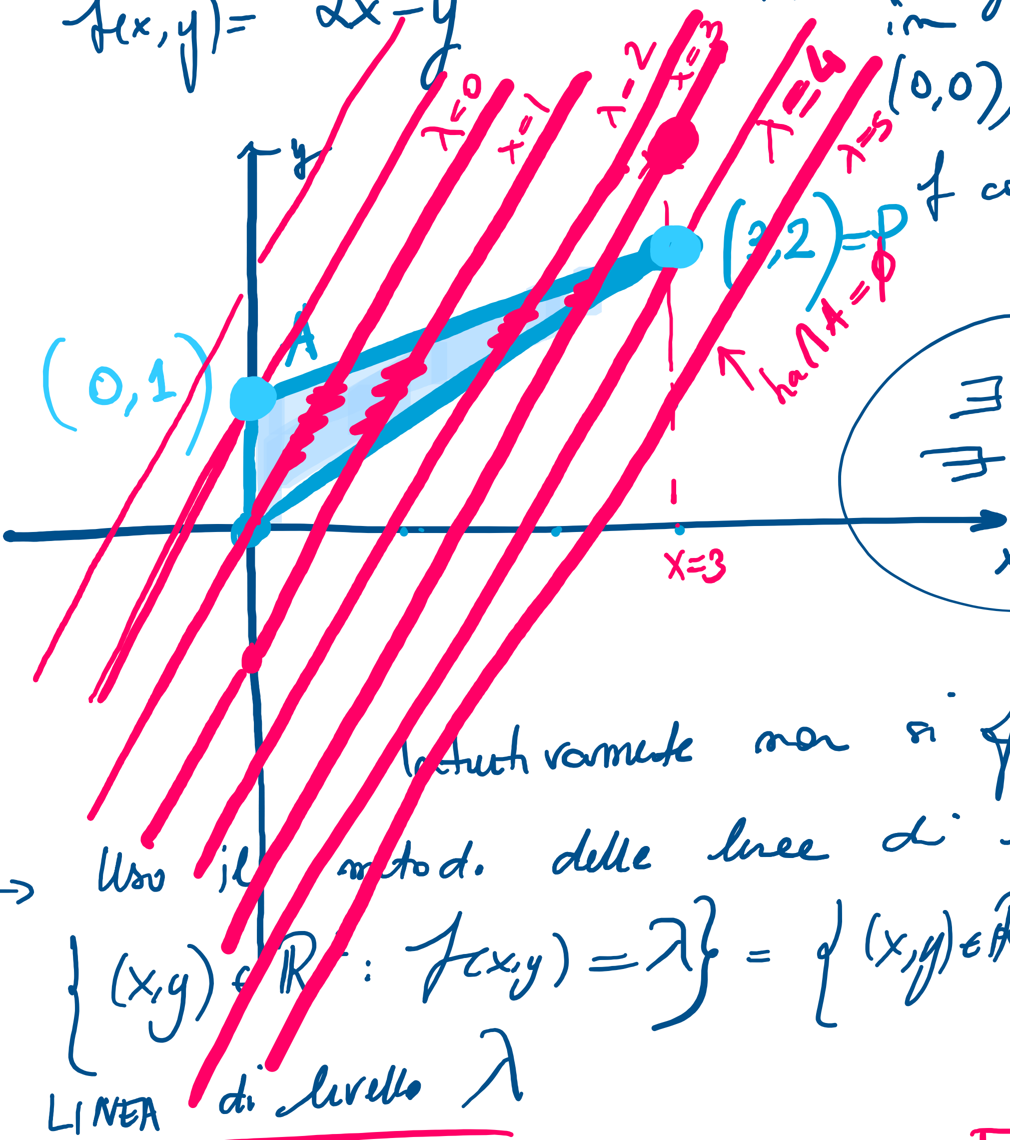
$f(x,y) = 2x - y$

$A$ = triangolo con vertici in $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,2)$

$f$ continua su $A$ compatto

$\Downarrow$

W: $\exists \max_{x \in A} f$, $\exists \min_{x \in A} f$




(costruttivamente non si fa)

$\rightarrow$ Uso il metodo delle linee di livello

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = \lambda\}$

LINEA di livello $\lambda$

$\Updownarrow$

$\boxed{y = 2x - \lambda}$

$\lambda = 2 \rightarrow y = 2x - 2$

$\lambda = 3 \rightarrow y = 2x - 3 \rightarrow P \in$ linea di livello 3

$P = (3,2)$

$$2 \neq 2 \cdot 3 - 3 \qquad 2 \neq 6-3$$

$y=2 \uparrow$ $\qquad$ $\uparrow x=3$

$x=3$ nella retta $y=2x-3$

$y=3$

$\lambda = 4 \rightarrow y = 2x-4$

per $x=3 \rightarrow y = 2\cdot 3 - 4 = 2$

retta passa per $(3,2) = P$

Il $\lambda$ più grande per cui l'insieme dato A interseca la linea di livello $\lambda$ è

$$\lambda = 4$$

$\Downarrow$ metodo delle linee di livello

$$\max_{x \in A} f = 4$$

$\downarrow$

punto di max $= P = (3,2)$

Analogamente $\boxed{\lambda = -1}$ è il più piccolo $\lambda$ t.c. $\{\text{linea di livello } \lambda\} \cap A \neq \emptyset$

$\longrightarrow \min_{x \in A} f = -1 \rightarrow$ pt. di min $= (0,1)$

# Esempio 3

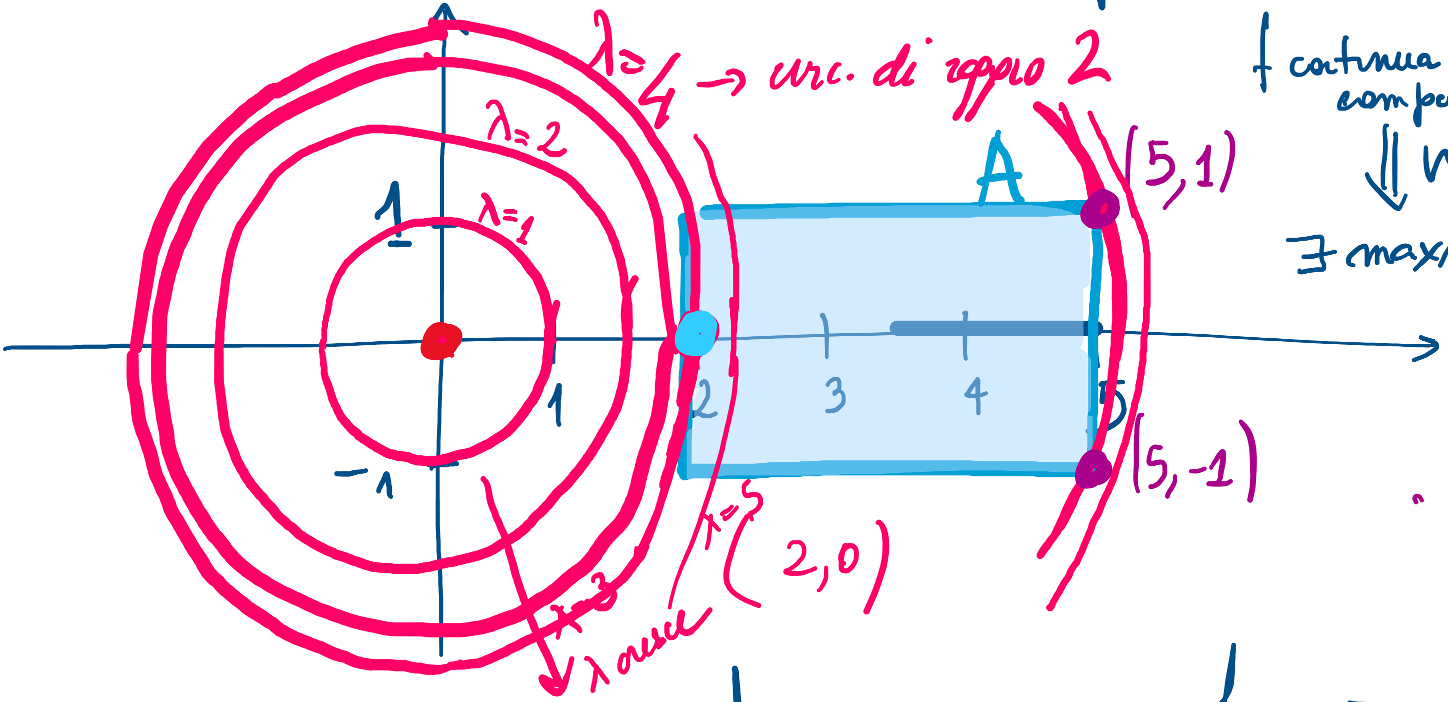
$f(x,y) = x^2+y^2$ su $A = [2,5]\times[-1,1]$

↳ compatto

$f$ continua su $A$ compatto

$\Downarrow W$

$\exists$ max/min




Le linee di livello $\lambda = L_\lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underline{x^2+y^2} = \lambda\}$ = circonferenze con centro nell'origine e raggio $\sqrt{\lambda}$

Il $\lambda$ più piccolo t.c. $L_\lambda \cap A \neq \emptyset$ è

$\lambda = 4 \rightarrow \min_{x\in A} f = 4$

pt. di min $(2,0) = L_4 \cap A$

I punti di coordinate $(5,1)$ e $(5,-1)$ sono tali che

$$\underset{\overset{\uparrow}{x}}{5}^2 + \underset{\overset{\uparrow}{y}}{1}^2 = 26$$

$\Rightarrow L_{26} \cap A = (5,1) \cup (5,-1)$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2 = 26\}$$

26 è il $\lambda$ più grande tale $L_\lambda \cap A \neq \emptyset$

$$\Longrightarrow \max_{x \in A} f(x) = 26$$

e i punti di max sono due $(5,1)$, $(5,-1)$

## 3 Metodo classico

Esercizio: risolvere l'esempio 3 precedente con metodo classico.

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

$$A = [2,5] \times [-1,1]$$

- STAZIONARI INTERNI $\longrightarrow \emptyset$

$(x_0,y_0) \in (2,5) \times (-1,1)$

$\nabla f(x_0,y_0) = 0$

$$\nabla f = (2x, 2y) \qquad \nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

Ma $(0,0)$ non è un punto interno di $A$

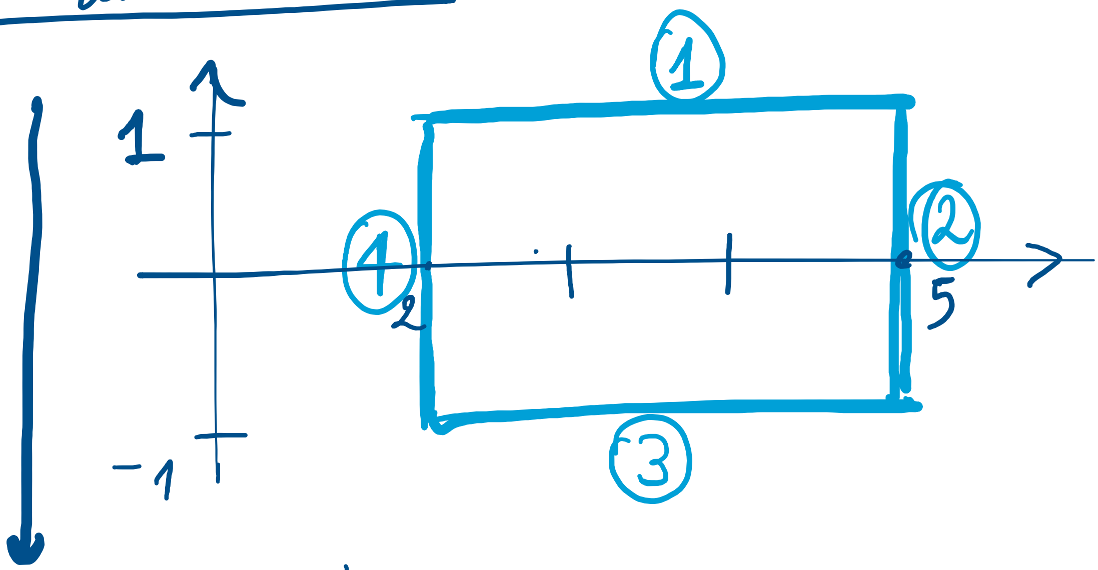
$\Longrightarrow \nexists$ pt. interni stazionari

- **P.TI SINGOLARI INTERNI**

$f(x,y)=x^2+y^2$ è differenziabile su tutto A

$\hookrightarrow \emptyset$

- **P.TI di BORDO**



**metodo della parametrizzazione**

$① = \{(t,1) : t \in [2,5]\}$

$y=1$

$g_1(t) = f(t,1) = t^2+1$

$② = \{(5,t) : t \in [-1,1]\}$

$x=5$

$g_2(t) = f(5,t) = t^2+25$

③ $= \{(t, -1) : t \in [2,5]\}$

$y = -1$

$$g_3(t) = f(t, -1) = t^2 + 1$$

④ $= \{(2, t) : t \in [-1, 1]\}$

$x = 2$

$$g_4(t) = f(2, t) = t^2 + 4$$

→ Studio le 4 funzioni sopra definite e ho max/min su ogni tratto.
Li confronto e prendo il più piccolo e il più grande

↓ min

↓ max

① → min per $t=2$ e max per $t=5$

② → min per $t=0$ e max per $t=\pm 1$

③ → min per $t=2$ e max per $t=5$

④ → min per $t=0$ e max per $t=\pm 1$

→ 6 punti

$\downarrow$

$(2,0) \to$ min

$(5,-1)$ e $(5,1) \to$ max