Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Studi di funzioni, 19 marzo 2021

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = (3 - x)e^{x^2+1}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo e minimo locali ed eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita su tutta la retta reale ed è ovunque continua e derivabile in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili. Vediamo il comportamento all'inifinito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (-\infty)e^{+\infty} = -\infty.$$

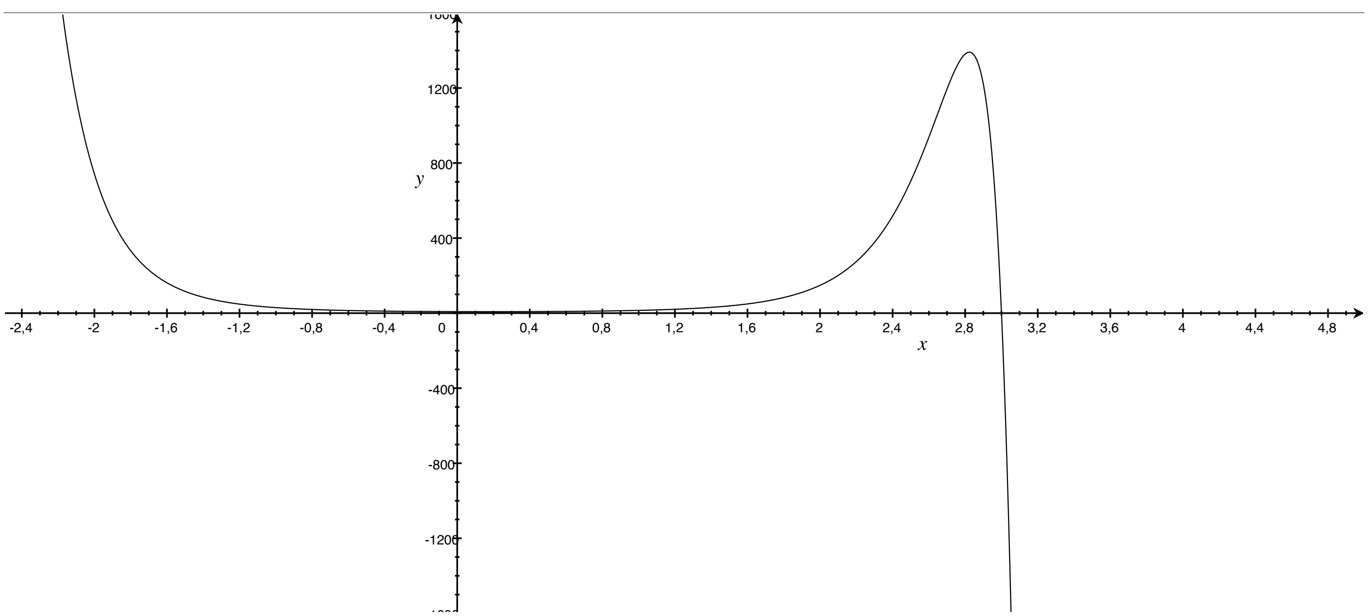
Dai risultati sui limiti si deduce subito che la funzione non ha né massimo né minimo e che l'estremo superiore è $+\infty$ e l'estremo inferiore è $-\infty$. Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = e^{x^2+1}(-2x^2 + 6x - 1)$$

il cui segno dipende unicamente da quello del trinomio $-2x^2 + 6x - 1$. Le radici sono

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

quindi avremo che la funzione è crescente se $x \in \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$ mentre è decrescente su ciascuna delle due semirette $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$. Il punto x_1 è di minimo locale e x_2 è di massimo locale.



Esercizio 2 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 2|}}{x - 2},$$

determinandone dominio, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti. Studiare poi la sua derivata e discutere l'esistenza di massimi e minimi locali.

Soluzione

Osserviamo che l'argomento della radice quadrata è sempre non negativo, quindi la funzione è definita quando il denominatore non si annulla, cioè se $x \neq 2$. In tale insieme la funzione è anche continua. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left|1-\frac{2}{x^2}\right|}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{\left|1-\frac{2}{x^2}\right|}}{x(1-\frac{2}{x})} = -1$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left|1-\frac{2}{x^2}\right|}}{x(1-\frac{2}{x})} = 1.$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y=-1$ per x che tende a $-\infty$, uno di equazione $y=1$ per x che tende a $+\infty$ e un asintoto verticale di equazione $x=2$. Non ci sono asintoti obliqui. La funzione non è né inferiormente né superiormente limitata.

Prima di calcolare la derivata dividiamo il dominio per esplicitare il valore assoluto.

$$x^2-2\geq 0 \iff x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-2} & \text{se } x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x-2} & \text{se } x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right). \end{cases}$$

Esaminiamo prima il caso $x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}(x-2)-\sqrt{x^2-2}}{(x-2)^2} = \frac{x(x-2)-(x^2-2)}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^2-2x-x^2+2}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2-2x}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Il denominatore è sempre positivo mentre il numeratore è positivo per $x<1$ e negativo per $x>1$, quindi, nella parte di dominio che stiamo considerando, avremo

$$f'(x)>0 \quad \text{se } x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right), \qquad f'(x)<0 \quad \text{se } x\in\left(\sqrt{2},2\right)\cup(2,+\infty).$$

Vediamo ora il caso $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}(x-2)-\sqrt{2-x^2}}{(x-2)^2} = \frac{-x(x-2)-(2-x^2)}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-x^2+2x-2+x^2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x-2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Anche in questo caso il denominatore è positivo e il numeratore è positivo per $x>1$, negativo per $x<1$.

Mettendo insieme i risultati otteniamo che la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$, strettamente decrescente in $[-\sqrt{2},1]$, strettamente crescente in $\left[1,\sqrt{2}\right]$, strettamente decrescente in $[\sqrt{2},2)$ e strettamente decrescente in $(2,+\infty)$. Il punto $x=-\sqrt{2}$ è di massimo locale, $x=1$ è di minimo locale, $x=\sqrt{2}$ è di massimo locale.

Esaminiamo ora la derivabilità nei punti $x=\pm\sqrt{2}$. Dato che la funzione è continua in tali punti, possiamo provare a fare il limite destro e sinistro della derivata.

$$f'_-(-\sqrt{2}) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{2-2x}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

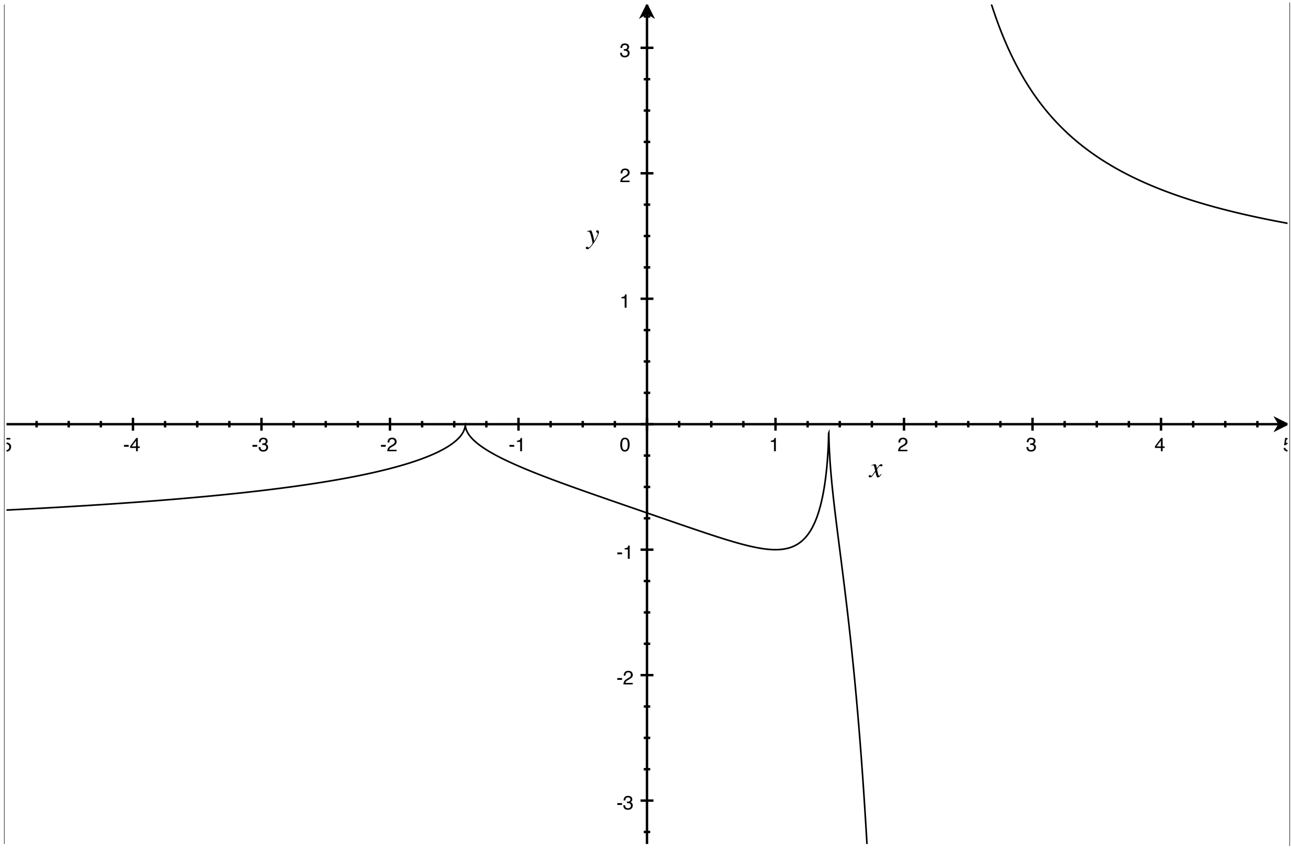
$$f'_+(-\sqrt{2}) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{2x-2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}-2}{0^+} = -\infty$$

il punto $x=-\sqrt{2}$ è quindi di cuspide.

$$f'_-(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{2x-2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{0^+} = +\infty$$

$$f'_+(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{2-2x}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2-2\sqrt{2}}{0^+} = -\infty$$

e anceh il punti $x=\sqrt{2}$ è di cuspide.



Esercizio 3 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{(1 - \log x)^2}$$

determinandone insieme di definizione, massimo e minimo oppure estremi superiore e inferiore, asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo o minimo locali. Tracciare inoltre un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > 0$ data la presenza del logaritmo, inoltre dobbiamo escludere i valori per cui si annulla il denominatore, quindi $\log x = 1$ cioè $x = e$. L'insieme di definizione di f sarà pertanto $(0, e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo ora i limiti. Ricordando che, dal teorema di de l'Hôpital, $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$, avremo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{(1 - (-\infty))^2} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to e} f(x) = \frac{e\, 1}{(1 - 1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\log x$ si ottiene che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x - 2} = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale di equazione $x = e$ e non ha asintoti orizzontali. Potrebbe avere un asintoto obliquo. Per verificarne la presenza calcoliamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{(1 - \log x)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Non c'è quindi nessun asintoto obliquo. Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = \frac{(\log x + x\frac{1}{x})(1 - \log x)^2 + x(\log x)2(1 - \log x)\frac{1}{x}}{(1 - \log x)^4} = \frac{(\log x + 1)(1 - \log x)^2 + 2\log x(1 - \log x)}{(1 - \log x)^4}$$

$$= \frac{(1 - \log x)\left((\log x + 1)(1 - \log x) + 2\log x\right)}{(1 - \log x)^4} = \frac{1 - \log^2 x + 2\log x}{(1 - \log x)^3}.$$

Studiamo il segno della derivata.

$$(1-\log x)^3 > 0 \iff \log x < 1 \iff x < e$$

ponendo $t = \log x$ otteniamo che

$$1-\log^2 x + 2\log x \geq 0 \iff 1-t^2+2t \geq 0 \iff 1-\sqrt{2} \leq t \leq 1+\sqrt{2} \iff e^{1-\sqrt{2}} \leq x \leq e^{1+\sqrt{2}}.$$

Combinando insieme il segno di numeratore e di denominatore otteniamo che

$$f'(x) > 0 \iff e^{1-\sqrt{2}} < x < e \text{ oppure } x > e^{1+\sqrt{2}}$$

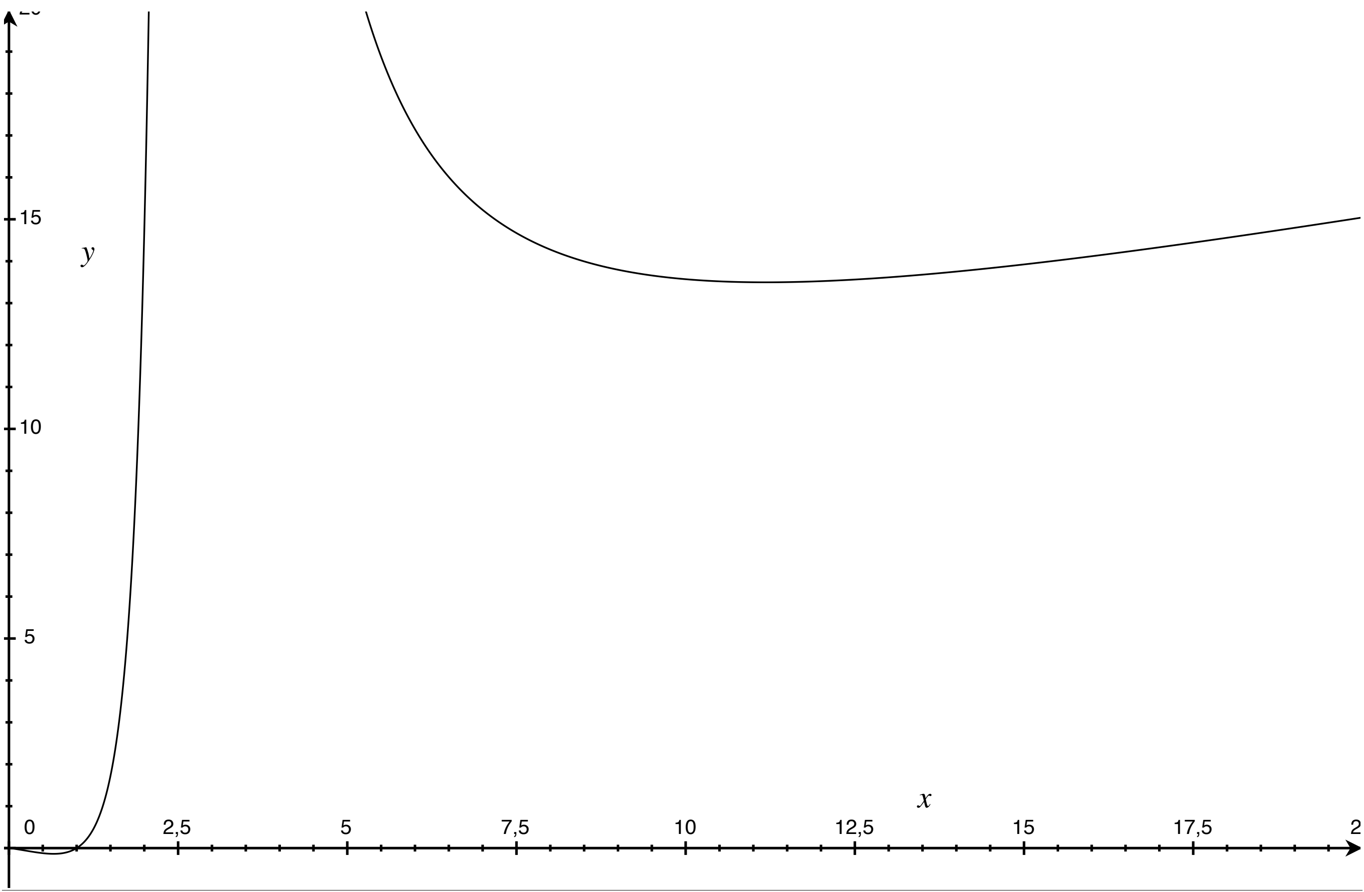
$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < e^{1-\sqrt{2}} \text{ oppure } e < x < e^{1+\sqrt{2}}$$

$$f'(e^{1-\sqrt{2}} = f'(e^{1+\sqrt{2}} = 0.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $\left(0, e^{1-\sqrt{2}}\right]$, strettamente crescente in $\left[e^{1-\sqrt{2}}, e\right)$, strettamente decrescente in $\left(e, e^{1+\sqrt{2}}\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $\left[e^{1+\sqrt{2}}, +\infty\right)$. I punti $x_1 = e^{1-\sqrt{2}}$ e $x_2 = e^{1+\sqrt{2}}$ sono di minimo locale. La funzione assume il suo valore minimo nel punto di ascissa x_1 e tale minimo vale

$$\min(f) = f(x_1) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})}{2}.$$

La funzione non è superiormente limitata quindi $\sup(f) = +\infty$.



Esercizio 4 Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}}$ determinandone insiemi di definizione e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo o estremi superiore e inferiore, punti di massimo e di minimo locali. Tracciare anche un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

La funzione non ha quindi né massimo né minimo e

$$\sup(f) = \infty, \qquad \inf(f) = -\infty.$$

Controlliamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x+4}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \infty$$

non ci sono quindi asintoti obliqui.

Vediamo ora gli intervalli di monotonia calcolando la derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(x^2+3x+4)^{-\frac{1}{3}}(2x+3) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{-\frac{1}{3}}\left(x^2+3x+4+2(2x+3)x\right) \\ &= \frac{x^2+3x+4+4x^2+6x}{3x^{\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x^2+9x+4}{3x^{\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $x^2+3x+4>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi l'unico punto dove si annulla il denominatore è $x=0$. Essendo f continua in $x=0$, per verificarne la derivabilità in tale punto è sufficiente calcolare il limite di f'

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{4}{0^+\,4^{\frac{1}{3}}} = \infty.$$

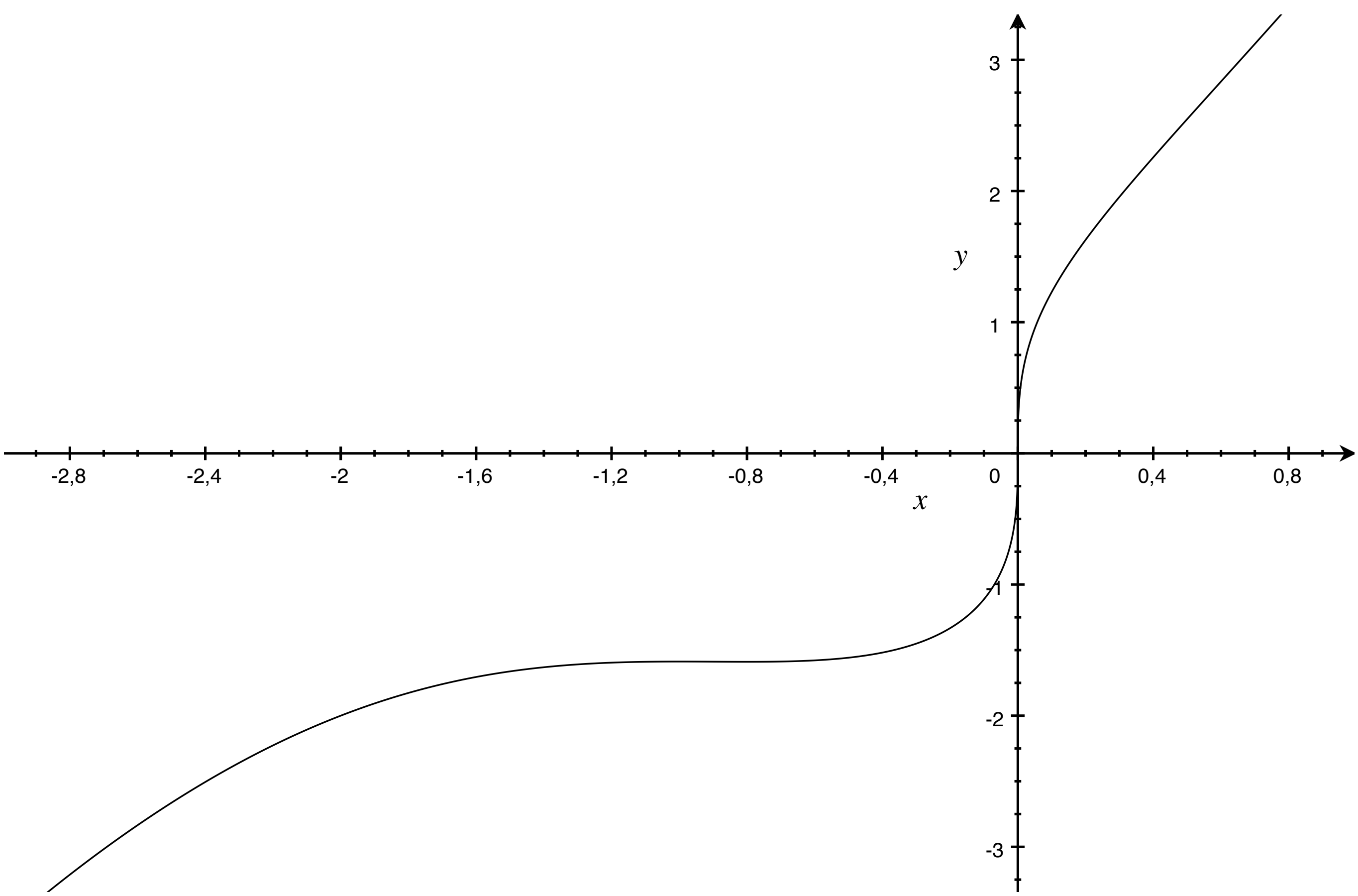
Ne segue che f non è derivabile in $x=0$ e ha retta tangente verticale. Il segno di f' è determinato unicamente dal suo numeratore, dato che il denominatore è sempre positivo.

$$5x^2+9x+4=0 \iff x=-\frac{4}{5} \text{ oppure } x=-1.$$

Quindi

$$f'(x)>0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{4}{5},\infty\right).$$

La funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(-\infty,-1]$, strettamente decrescente nell'intervallo $[-1,-\frac{4}{5}]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[-\frac{4}{5},\infty)$. Il punto $x=-1$ è di massimo locale mentre il punto $x=-\frac{4}{5}$ è di minimo locale.



Esercizio 5 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \log x}{\log^2 x}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

Per la presenza del logaritmo deve essere $x > 0$ inoltre il denominatore della frazione deve essere diverso da 0, quindi $x \neq 1$. Il dominio della funzione è quindi l'insieme $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Calcoliamo i limiti.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - \log x}{\log^2 x} = \frac{1 - 0}{0^+} = +\infty.$$

Con il cambiamento di variabile $\log x = t$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \log x}{\log^2 x} = \lim_{t\to -\infty} \frac{1 - t}{t^2} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \log x}{\log^2 x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1 - t}{t^2} = 0.$$

La funzione presenta quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1$ e uno orizzontale di equazione $y = 0$. La funzione non è superiormente limitata quindi $\sup(f) = +\infty$. Cerchiamo ora eventuali massimi e minimi locali valutando la derivata.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}\log^2 x - (1 - \log x)2(\log x)\frac{1}{x}}{\log^4 x} = \frac{-\log^2 x - 2\log x + 2\log^2 x}{x\log^4 x} = \frac{\log x - 2}{x\log^3 x}.$$

Il numeratore è positivo se e solo se

$$\log x > 2 \iff x > e^2$$

mentre il denominatore è positivo se e solo se

$$\log^3 x > 0 \iff x > 1$$

dato che nel dominio della funzione è sempre $x > 0$. Combinando insieme i due risultati otteniamo che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, 1) \cup (e^2, +\infty), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (1, e^2), \qquad f'(e^2) = 0.$$

La funzione è quindi strettamente crescente nell'intervallo $(0, 1)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(1, e^2]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[e^2, +\infty)$. Valutiamo la funzione nel punto di minimo locale $x = e^2$

$$f(e^2) = \frac{1 - \log e^2}{(\log e^2)^2} = \frac{1 - 2}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e che f è strettamente crescente in $(0, 1)$ otteniamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$. Ne segue che $-\frac{1}{4}$ è il minimo della funzione.
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}x\log^3 x - (\log x - 2)(\log^3 x + x\,3(\log^2 x)\frac{1}{x})}{x^2\log^6 x} = \frac{\log^3 x - (\log x - 2)(\log^2 x)(\log x + 3)}{x^2\log^6 x}$$
$$= \frac{\log^2 x\,(\log x - (\log x - 2)(\log x + 3))}{x^2\log^6 x} = \frac{\log x - \log^2 x - 3\log x + 2\log x + 6}{x^2\log^4 x} = \frac{-\log^2 x + 6}{x^2\log^4 x}.$$

Risulta quindi che $f''(x) > 0$ se e solo se

$$-\log^2 + 6 > 0 \iff 6 > \log^2 x \iff |\log x| < \sqrt{6} \iff -\sqrt{6}x\log x < \sqrt{6} \iff e^{-\sqrt{6}} < x < e^{\sqrt{6}}.$$

Ne segue che la funzione è concava in $(0, e^{-\sqrt{6}}]$, convessa in $[e^{-\sqrt{6}}, 1)$ ancora convessa in $(1, e^{\sqrt{6}}]$ e concava in $[e^{\sqrt{6}}, +\infty)$.