Metodi per determinare max/min di f su un insieme compatto.

Metodo classico

- punti staz. interni
- punti singolari interni
- punti di bordo $\qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\downarrow$

Come studiare il bordo?

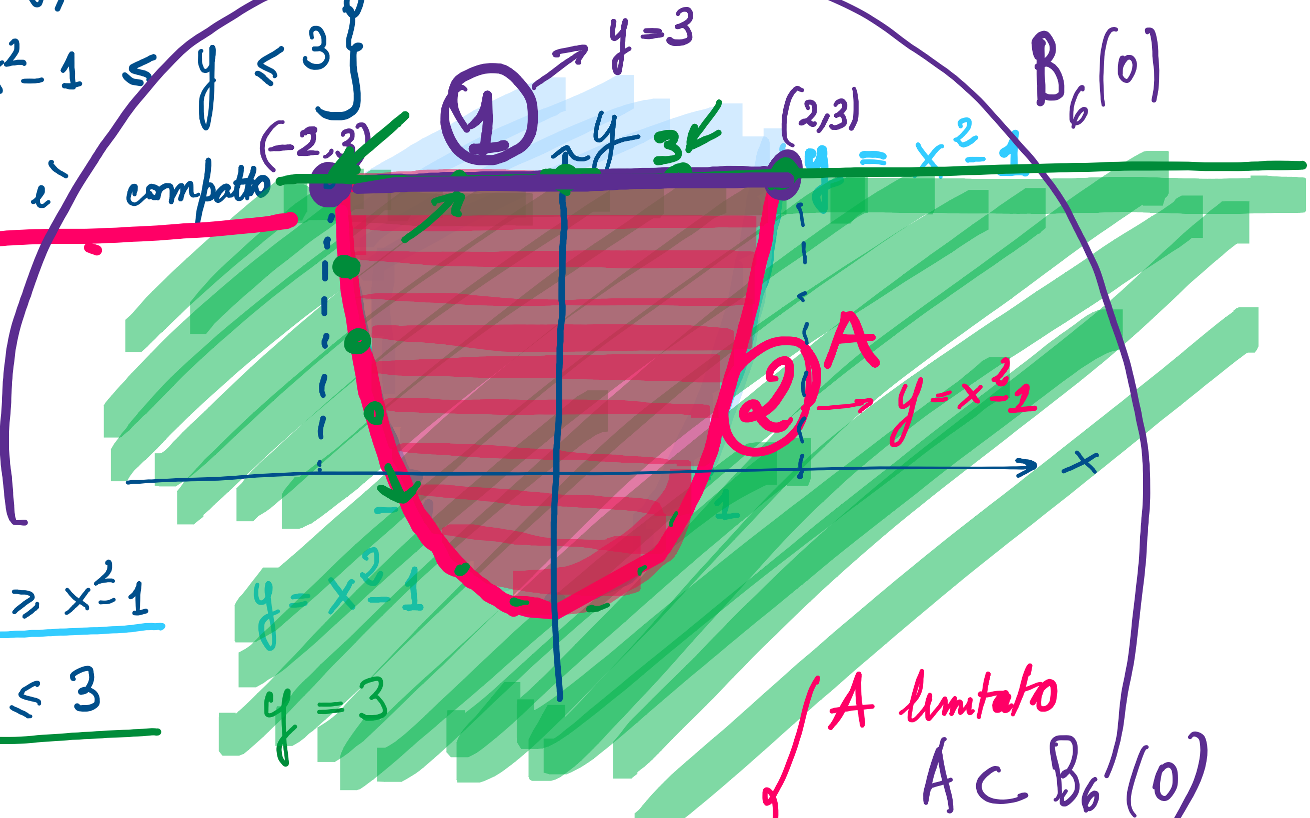
1. Parametrizzazione del bordo
2. **Moltiplicatori di Lagrange**

Parametrizzazione del bordo

Esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3x^2 - y + 3 \text{ sull'insieme } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 3\}$$

A è compatto



$$\begin{cases} y \ge x^2 - 1 \\ y \le 3 \end{cases}$$

A limitato, $A \subset B_6(0)$

A chiuso

$\Downarrow$

A compatto

f continua su un compatto $\xRightarrow{W}$ f ammette max e min

linee di livello : $3x^2 - y + 3 = \lambda$

$$\underbrace{y = \underbrace{3x^2 + (\lambda+3)}}$$

metodo + semplice

$\downarrow$

<u>Metodo classico</u>

$f(x,y) = \underline{3x^2} - y + 3$

$\nabla f = 0$

- STAZIONARI INTERNI

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) =$$

$$= \left(\underline{6x}, \underline{-1} \right)$$

$$\nabla f(x,y) = (6x, -1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv -1 \neq 0$$

$$\nabla f(x,y) \overset{?}{=} 0 \longrightarrow \text{mai}$$

$\longrightarrow \nexists$ punti staz. interni

$\Downarrow$

$\nexists$ max/min tra i punti interni <u>non singolari</u> di A

- <u>PUNTI SINGOLARI INTERNI</u> $\longrightarrow \nexists$ $\longrightarrow$ $\nexists$ max/min tra i punti interni ad A

- <u>PUNTI di BORDO</u> $\longrightarrow$ parametrizzazione

① → Punti che stanno sulla retta
$y=3$ con $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{cases} y=3 \\ y=x^2-1 \end{cases} \rightarrow \quad x^2-1=3 \qquad x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

$$(-2,3) \text{ e } (2,3)$$

① $\iff$ $x=t$ $\quad t \in [-2,2]$
$y=3$

$(x,y) \in$ ① $\iff$ $(x,y)=\underbrace{(t,3)}_{\text{parametro}}$ $\quad t \in [-2,2]$

f ristretta a ① $\rightarrow$ $g_1(t)=f(t,3)$
$t \in [-2,2]$

$$= 3t^2 - \cancel{3} + \cancel{3} = 3t^2$$

$f(x,y)=3x^2-y+3$

$$g_1(t) = 3t^2$$

② $\iff$ Punti che stanno sulla parabola
$y=x^2-1$ per $x \in [-2,2]$

② $\iff$ $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) = (t, t^2-1)$ $\quad t \in [-2,2]$

$x=t$ parametro
$y=t^2-1$

$$g_2(t) = f(t, t^2-1) = 3t^2 - t^2 + 1 + 3$$

$t \in [-2,2]$

$g_2(t) = 2t^2+4$

$g_1(t) = 3t^2$ su ① $\quad t \in [-2,2]$ | $g_2(t) = 2t^2+4$ su ② $\quad t \in [-2,2]$

Cercare max/min

$\boxed{g_1(t) = 3t^2}$

max per $t=-2$ o $t=2$

$g_1(t) = 12$

min per $\boxed{t=0}$

$\boxed{g_1(t) = 0}$

$\boxed{g_2(t) = 2t^2+4}$

max per $t=-2, 2$

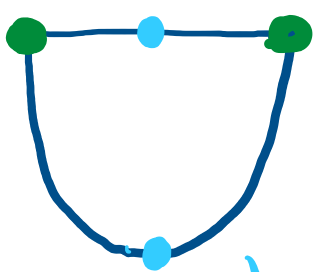
$g_2(t) = 12$

min per $t=0$

$\boxed{g_2(t) = 4}$

$(0,3) \to g_1 = 0$

$t=-2 \qquad t=0 \qquad t=2$



$(0\ -1) \to g_2 = 4$

$\to \underbrace{(-2,3) \text{ e } (2,3)}_{\text{punti di max}}$

e $f(-2,3) = f(2,3) = 12$

$g_1 = g_2$

Per f il punto di minimo è $(0,3)$

e $f(0,3) = g_1(0) = 0$

$\min_{x \in A} f = 0$

$\max_{x \in A} f = 12$

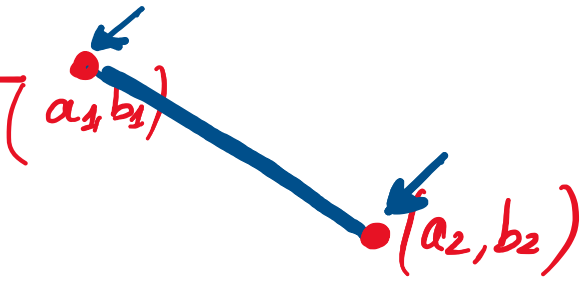
$(-2,3)$ $(2,3)$

Come parametrizziamo i bordi

1) Segmento di estremi (a_1,b_1) e (a_2,b_2)

$$\boxed{\underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} = (a_1,b_1) + t\,(a_2-a_1,\, b_2-b_1)}$$

$t \in [0,1]$



2) Il tratto del grafico $y=\varphi(x)$ con $x \in [a,b]$

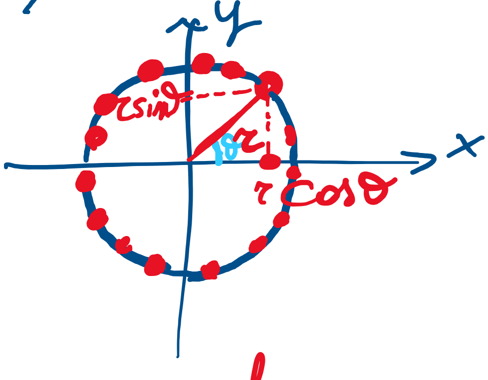
$$\boxed{(x,y) = (t,\, \varphi(t)) \qquad t \in [a,b]}$$

variabile indipendente = parametro

3) La circonferenza centro in $(0,0)$ e raggio r

$$\boxed{(x,y) = (r\cdot\cos\theta,\; r\sin\theta) \qquad \theta \in [0,2\pi]}$$

parametro



4) La circonferenza con centro (x_0,y_0) e raggio r

$$\boxed{(x,y) = (x_0 + r\cos\theta,\; y_0 + r\sin\theta)} \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

⑤ L'ellisse di equazione $ax^2+by^2=1$ $a,b>0$

$$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\theta\,,\ \frac{1}{\sqrt{b}}\sin\theta\right)\qquad \theta\in[0,2\pi]$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$[f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$

Def: Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione

allora, l'insieme

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0\}$$

si dice **LUOGO DI ZERI** della funzione Φ (linea di livello $\lambda = 0$)

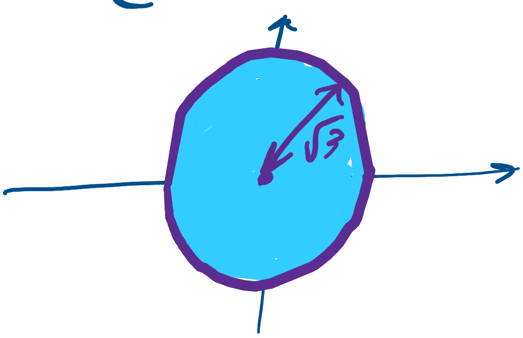
Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange serve per trovare possibili punti di max/min di una funzione f su un insieme A quando bordo A = luogo di zeri di una funzione

esempi

1) $f(x,y)$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3\}$

Il bordo di A è la circonferenza data da

$x^2 + y^2 = 3$



$\leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3 = 0$

se definisco $\Phi(x,y) = x^2+y^2-3$

Il bordo di A è il luogo di zeri della funzione $\Phi \to$ Lagrange

2) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+3y^2\leq 5\}$

↑ ellisse

↓

Bordo di A = luogo di zeri della funzione

$\Phi = 2x^2+3y^2-5$

$\Phi(x,y)=0 \iff$ bordo di A

Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^2$

Sia V il luogo di zeri di $\Phi(x,y)$

Allora i candidati ad essere punti di min/max di f in V si cercano tra le seguenti due categorie

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \Phi(x,y)=0\}$

1) Punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.c.

1 condizione → $\Phi(x,y)=0 \Longrightarrow (x,y)\in V$

2 condizioni → $\nabla\Phi(x,y)=0$

$$\boxed{\begin{cases}\Phi(x,y)=0\\ \nabla\Phi(x,y)=0\end{cases}} \quad (S1)$$

↓ Vettore $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$

se $\exists$ (x,y) che soddisfa il sistema (S1) allora tale punto è candidato a punto di max/min

$$\downarrow$$

$$f(x,y) = ?$$

$$(S1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \phi(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

Tre equazioni per 2 incognite (x,y)

$$\downarrow$$

Questo sistema non sempre ha soluzioni

② Punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$(S2) \quad \boxed{\begin{cases} \Phi(x,y) = 0 & \leftarrow 1 \text{ condizione} \\ \boxed{\nabla f(x,y) = \lambda \nabla \phi(x,y)} \\ \text{per un qualche } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

2 condiz.

gradiente di f è multiplo del gradiente di Φ

② $\iff$ soluzioni del sistema

$$(S2)\quad \begin{cases} \phi(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\underbrace{\text{Cerco } \underset{1}{\lambda},\ (\underset{2}{x},\underset{3}{y}) \text{ t.c. (S2)}}_{\text{3 equazioni per 3 incognite}}$$

$\downarrow$

Di solito (S2) ha soluzioni

$\downarrow$

Trovo λ, (x,y) t.c. (S2) è soddisfatto

Ci interessa il punto di coordinate (x,y)

$\downarrow$

CANDIDATO ad essere pt. di max/min

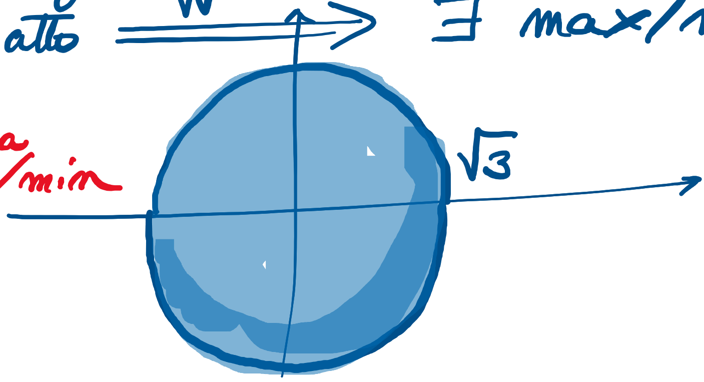
$$\boxed{\text{Il numero } \lambda \text{ si dice moltiplicatore di Lagrange}}$$

Esempio 1

$f(x,y) = \dfrac{x-2y}{}$ $\qquad f: A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \leq 3\}$

f continua su A compatto $\xRightarrow{W}$ $\exists$ max/min



Metodo classico $\to$ Ricerca di max/min

- ↳ (A) Punti stazionari interni
- ↳ (B) Punti singolari interni
- ↳ (C) Punti di bordo

(A) P.ti staz. interni $\emptyset$

$f(x,y) = x-2y$

$\nabla f(x,y) = (1, -2) \leftarrow$ costante

(B) P.ti singolari interni $\emptyset$

(C) P.ti di bordo

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 = 3\}$

$\downarrow$

V è luogo di zeri di $\Phi = x^2+y^2-3$

se $(x,y) \in V \iff \Phi(x,y) = 0$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per cercare p.ti di max/min sul bordo

1 (S1) $\Longleftrightarrow$ (x,y) : $\begin{cases} \phi(x,y) = 0 \\ \nabla\phi(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\Phi(x,y) = x^2+y^2-3$$

$$\nabla\Phi(x,y) = (2x, 2y)$$

$$(S1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3 = 0 \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

incompatibili

$\nexists$ soluzioni a (S1)

2 soluzioni di (S2) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \phi(x,y) = 0 \\ \lambda\nabla\phi(x,y) = \nabla f(x,y) \end{cases}$

Cerco λ, x, y t.c. sia verificato

$\exists \ \lambda, x, y$ t.c.

$$\begin{cases} \phi(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) & (*) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) & (**) \end{cases}$$

?

$$\begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ (*) \rightarrow \ 1 = \lambda \cdot (2x) \\ (**) \ -2 = \lambda \cdot (2y) \end{cases}$$

$\exists\ \lambda, x, y$ t.c. $\begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \end{cases}$? $\quad$ sì

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \leftarrow \\ \underbrace{1+4 = 3 \cdot 4\lambda^2} \end{cases}$$

$$5 = 12\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{12} = \frac{5}{34}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

2 terne (λ, x, y)

$\exists$ 2 soluzioni al sistema (S2)

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} \end{cases} \rightarrow \text{moltiplicatori di Lagrange} \leftarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} \end{cases}$$

I candidati punti di max/min di f sul bordo

$$\boxed{P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} , - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)}$$

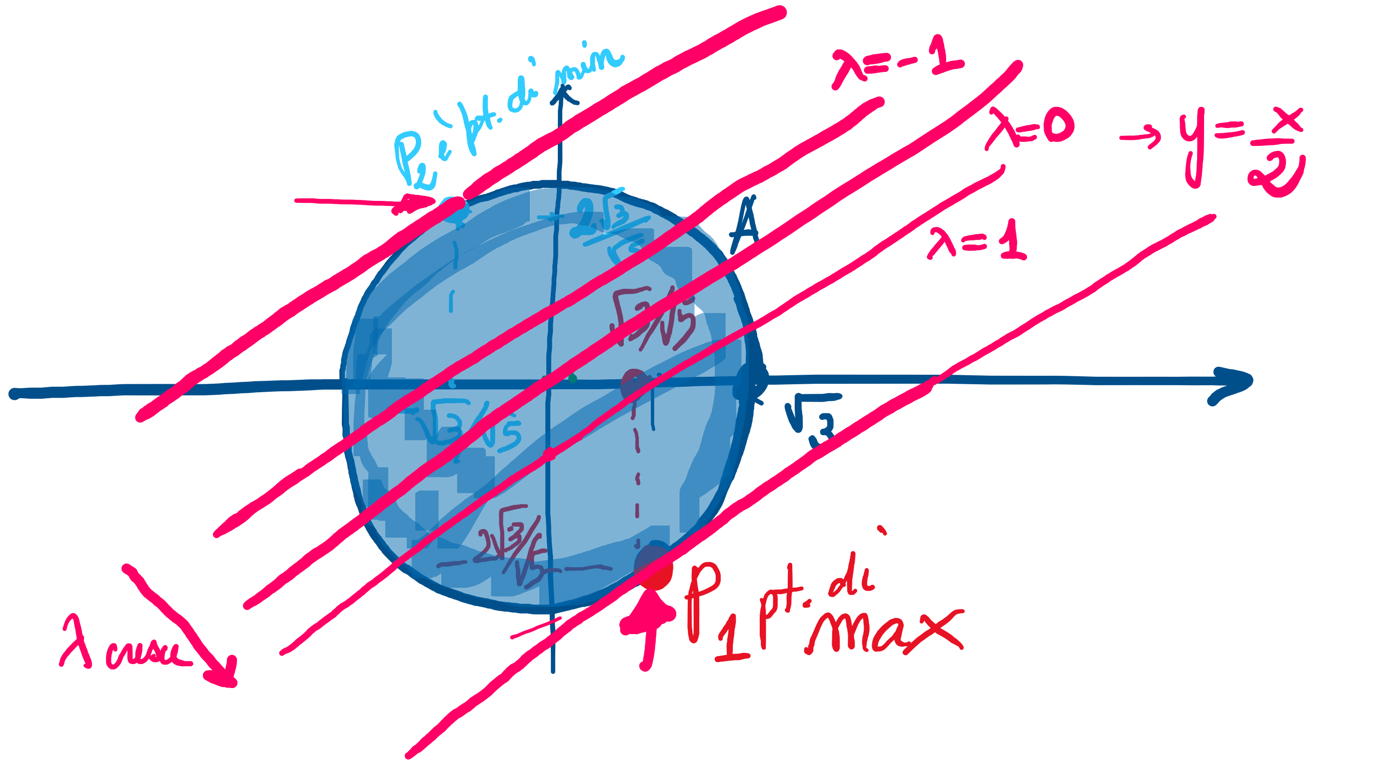
$$\boxed{P_2 = \left(- \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} , \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)}$$

$f(x,y) = x - 2y$

$\hookrightarrow f(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{15}$ max

$\hookrightarrow f(P_2) = - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{15}$ min

P_1 è pt. di max e P_2 è pt. di min.



Metodo linee di livello

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = \lambda\}$

$2y = x - \lambda$ $\quad \boxed{y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}}$

rette

$\lambda = 0 \rightarrow y = \frac{x}{2}$

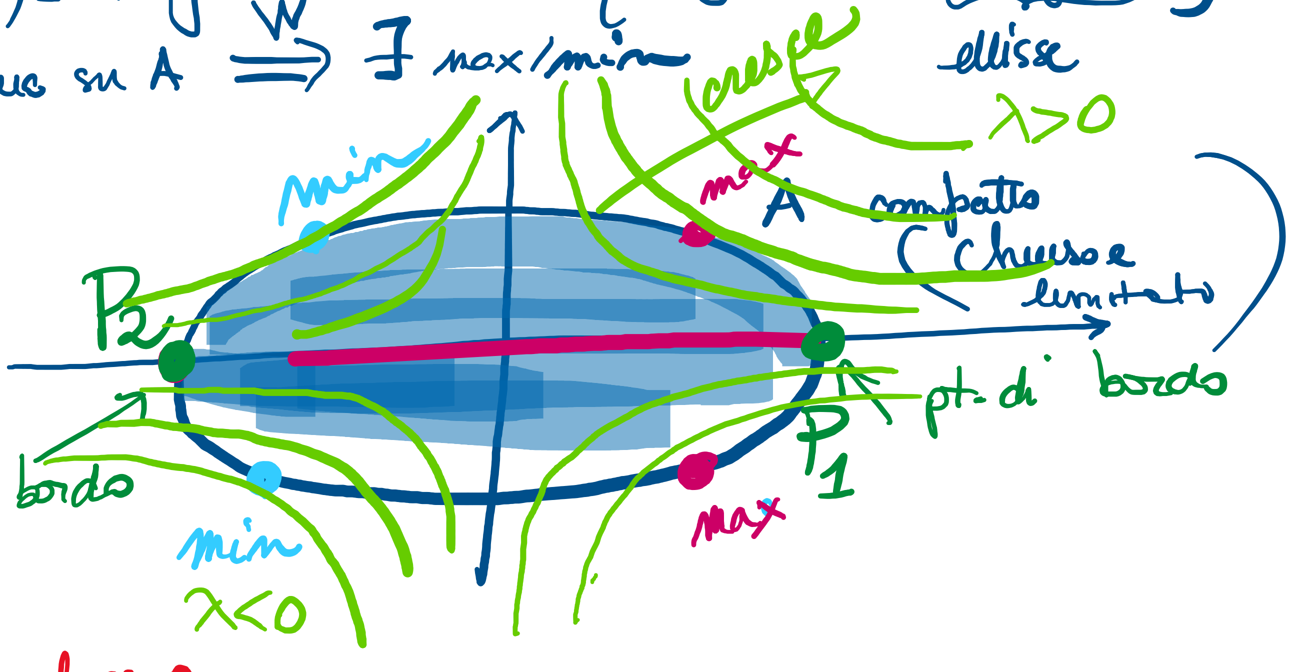
$\lambda = 1 \rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\lambda = -1 \rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

esempio 2

$f(x,y) = x \cdot y^2$ $\qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + 3y^2 \leq 5}_{\text{ellisse}}\}$

f continua su A $\overset{W}{\Longrightarrow}$ $\exists$ max/min



Metodo classico

(A) P.ti staz. interni

$\nabla f(x,y) = (y^2, \underline{2xy})$

$\nabla f(x,y) = 0 \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$

$$\boxed{\nexists\ (x, y=0) = 0}$$

(B) P.ti singolari interni $\nexists \to \emptyset$

(C) P.ti di bordo $\longleftrightarrow$ $\phi(x,y)=0$

$\phi(x,y) = x^2+3y^2-5$

$\nabla\phi = (2x, 6y)$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

(1) (S1) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \phi(x,y)=0 \\ \nabla\phi = 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x^2+3y^2-5=0 \\ 2x=0 \\ 6y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ incompatibile con la 1ª

(S1) non ha soluzioni

(2) (S2) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \phi(x,y)=0 \\ \underbrace{\nabla f(x,y)}_{(y^2,\,2xy)} = \lambda \underbrace{\nabla\phi}_{(2\ \ 6)} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+3y^2-5=0 \\ y^2 = 2\lambda x \\ \cancel{2}xy = \cancel{6}^{\,3}\lambda y \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+3y^2-5 = 0 \\ xy = 3\lambda \\ y^2 = 2\lambda x \end{cases}$ $\leftarrow$ non semplifico y (ma so se $y=0$)

$$xy = 3\lambda y \rightarrow y(x-3\lambda)=0$$

$x = 3\lambda$ $\qquad$ $y = 0$

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y^2 = 2\lambda\cdot(3\lambda) = 6\lambda^2 \\ 9\lambda^2 + 18\lambda^2 = 5 \end{cases}$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{27} \rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\ y = \pm\sqrt{6}\lambda \end{cases}$$

$\downarrow$

4 punti

$$\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$P_3 = \left(\sqrt{5}/\sqrt{3}, \sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$

$P_4 = \left(-\sqrt{5}/\sqrt{3}, \sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$

$P_5 = \left(\sqrt{5}/\sqrt{3}, -\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$

$P_6 = \left(-\sqrt{5}/\sqrt{3}, -\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2\lambda x = 0 \\ x^2 \cancel{+} 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = 0 \\ x^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$\downarrow$

$P_1 = (\sqrt{5}, 0)$

$P_2 = (-\sqrt{5}, 0)$

$f(P_1) = f(P_2) = 0$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \rightarrow \max$$

2 pt di max

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = -\frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \rightarrow \min$$

2 pt di min

Linee di livello $\longleftrightarrow$ Metodo dei rette di Lagrange

$xy^2 = \lambda \rightarrow y^2 = \frac{\lambda}{x}$

$f(x,y)$