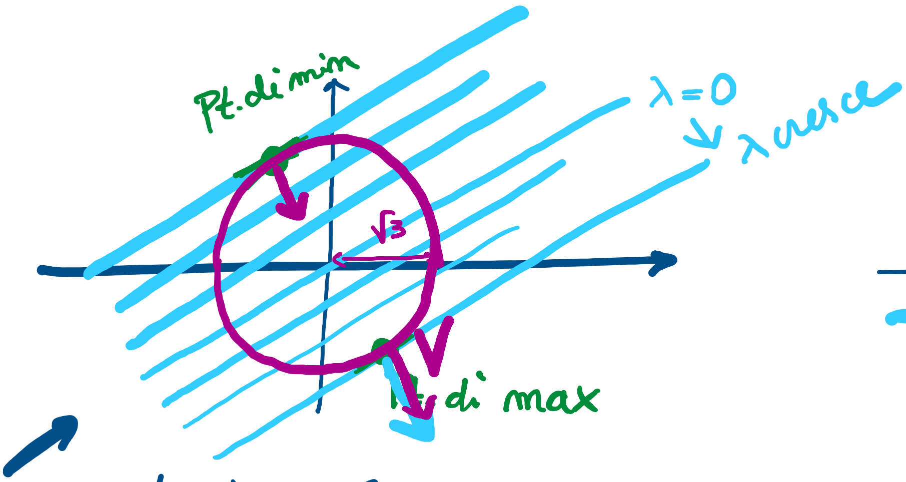
Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

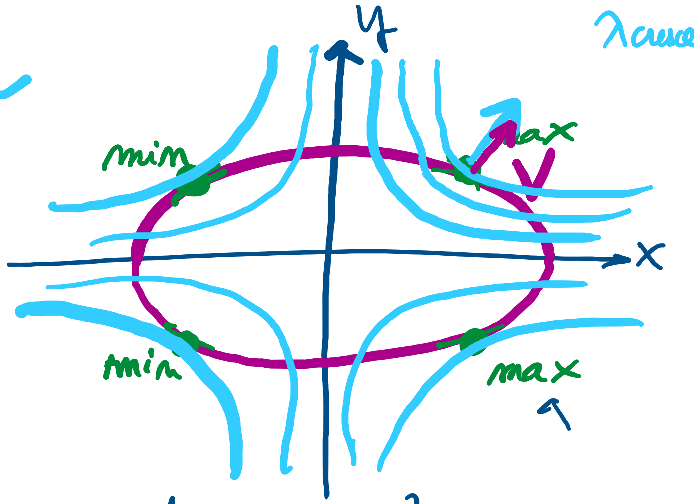


$f(x,y) = x - 2y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 3\}$

V = bordo di A

$x - 2y = \lambda \qquad y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$



$f(x,y) = xy^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \le 5\}$

V = bordo di A

$x^2 + 3y^2 = 5$

$\phi(x,y) = x^2 + 3y^2 - 5$

$xy^2 = \lambda$

$x = \frac{\lambda}{y^2}$

Osserviamo

- Nei pt. di max/min → le linee di livello e la linea di bordo (grafico di ϕ) sono tangenti
- il gradiente è $\perp$ alle linee di livello
- ∇f e $\nabla \phi$ saranno paralleli

↓

Nei pt. di max e min risolviamo il (S2)

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

Geometricamente

- Sia V il bordo di A t.c. $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad (A \subset \mathbb{R}^2)$
- Supponiamo che V sia il luogo di zeri di $\Phi(x,y)$
  ↳ V è linea di livello per Φ

① Nei punti di max/min le linee di livello di f e $\underbrace{\text{la linea di livello } \lambda = 0 \text{ di } \phi}_{V}$ sono tangenti

[le linee di livello sono tg a V nei punti di max/min]

② ∇f è $\perp$ alle linee di livello di f
$\nabla \phi$ è $\perp$ alle linee di livello di ϕ

$\Downarrow$

I due gradienti devono essere paralleli tra loro

③ Quindi ∇f deve essere un multiplo del $\nabla \phi$

$\Downarrow$

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla \phi}$$

Geometricamente, risolvere (S2) equivale a cercare quei punti di V in cui le linee di livello di f sono tangenti all'insieme di V stesso

Esempi in cui (S1) ha soluzione → casi particolari "patologici"

"casi brutti"

$$(S1):\ \begin{cases} \phi(x,y)=0 \\ \nabla\phi(x,y)=0 \end{cases}$$

$V =$ luogo di zeri di Φ $\rightarrow$ V non è regolare

1

$$\Phi(x,y)= x^2-y^3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -3y^2$$

$$(S1)\ \begin{cases} x^2-y^3=0 & \rightarrow (x,y)\in V \\ 2x=0 & \\ -3y^2=0 & \rightarrow (x,y)=(0,0) \text{ è soluzione} \end{cases}$$

↓

Trovato una soluzione di (S1)

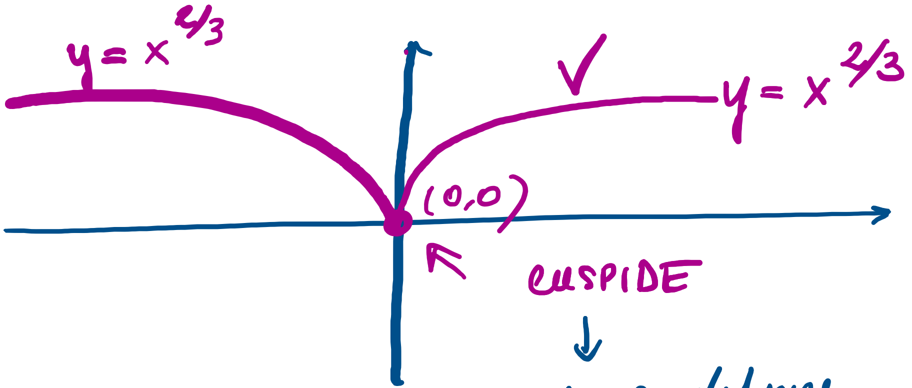
Come è fatto V?

Come è fatto il luogo di zeri di ϕ?

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \phi(x,y)=0 \}$$

$$\Updownarrow$$

$$y^3=x^2 \iff y = x^{2/3}$$



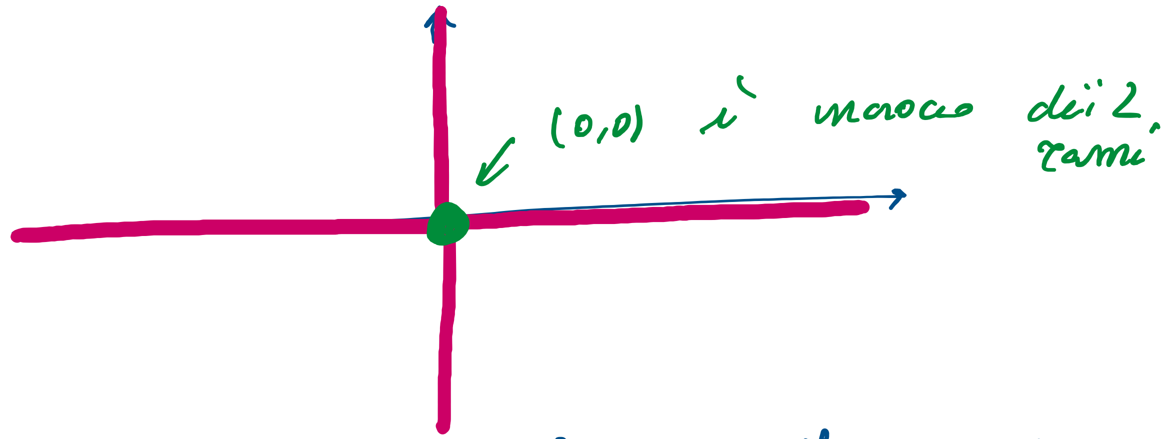
CUSPIDE

↓

Non so definire la condizione "tangente"

② $\phi(x,y) = x \cdot y \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x$

$$S1 \quad \begin{cases} xy = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0) \text{ è soluzione.}$$



$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} \iff$ of due assi

Teorema di Weierstrass generalizzato

Analisi finora 1D

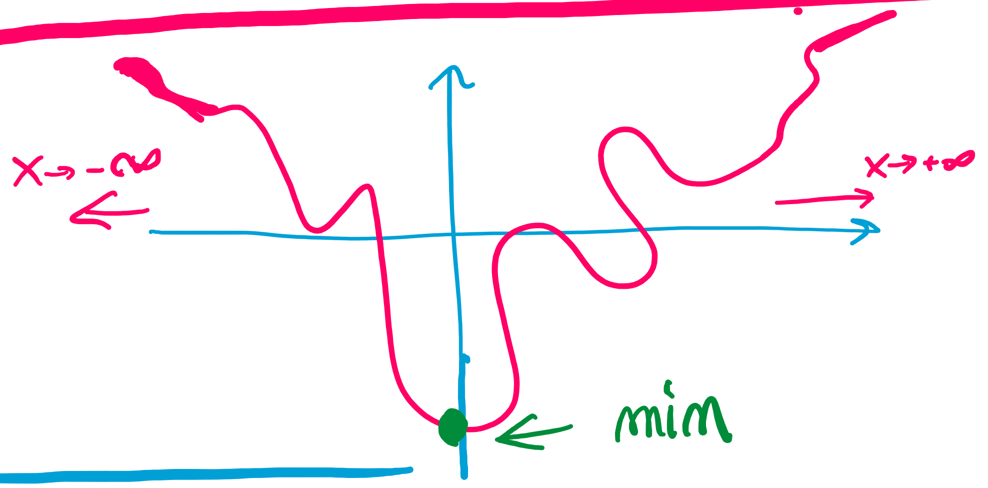
Teorema di Weierstrass generalizzato

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

allora esiste $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

insieme non compatto



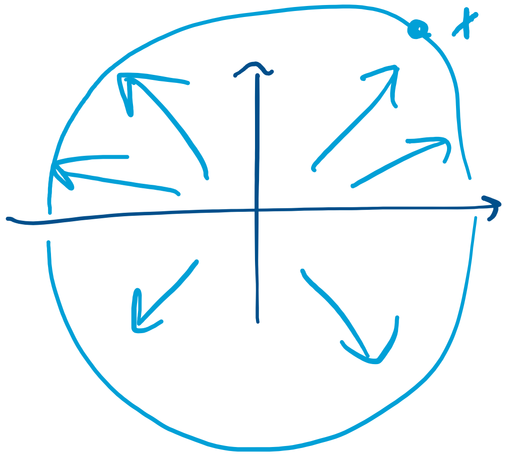
Cosa succede $f: \mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}}$?

Cosa vuol dire andare all'∞ in $\mathbb{R}^n$?

$\longrightarrow$ Vuol dire allontanarsi sempre di più dall'origine

$\Updownarrow$

che $|x|$ (norma) di x va all'∞



$$\lim_{(x,y)\to\infty} \iff \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \iff \lim_{|x|\to+\infty}$$

$$\iff \lim_{\rho\to\infty}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) \boxed{= +\infty}$$

$\iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R>0 \quad$ t.c.

$$f(x,y) \geq M \qquad \forall (x,y) \in B_R((0,0))^c$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\underbrace{x\to\infty}_{\text{in } \mathbb{R}^n}} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists R>0$ t.c.

$f(x) \geq M \quad \forall x \in \underbrace{B_R(0)^c}$

intorno di ∞

non è compatto

Teorema di Weierstrass generalizzato

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ una funzione $\boxed{\text{continua}}$

supponiamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\Downarrow$$

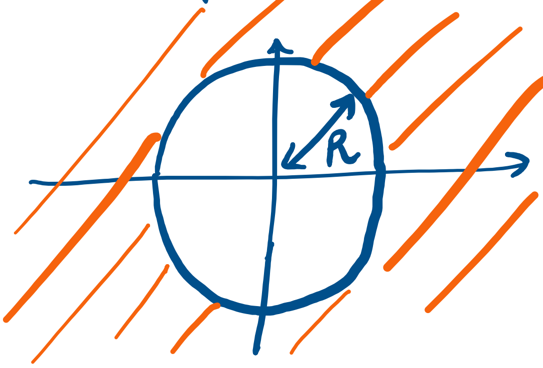
allora, esiste $\boxed{\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}$

Dim $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty \xRightarrow{\text{def. di limite}}$ $\underline{\forall M}$ $\exists R>0$ t.c. $\boxed{f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_R(0))^c}$

Scelgo $M = f(0)+1$ $\qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$\exists R>0$ t.c. $f(x) > f(0)+1 \quad \forall x \in (B_R(0))^c$



$\underline{f(x) > f(0)+1}$

f è grande

Considero $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}$

$$f : \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq R\}}_{\overline{B_R(0)} \text{ è compatto}} \to \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

per Weierstrass classico che

$$\exists \min_{x \in \overline{B_R(0)}} f(x) = m \to = f(x_0)$$
$x_0 \in \overline{B_R(0)}$

$\Rightarrow$ Dimostrare che m è minimo ma su tutto $\mathbb{R}^n$ e non su $\overline{B_R(0)}$

Ci sono 2 casi

1° • $\boxed{\text{se } |x| \leq R}$, allora $\boxed{f(x) \geq m}$ per definiz. di $m = \min_{\overline{B_R(0)}} f$

2° • $\boxed{\text{se } |x| \geq R}$, allora $f(x) \geq M = f(0) + 1$

per scelta R

$\geq f(0)$

$\geq m$

perchè 0 sta nella palla $|x| \leq R$

$\downarrow$

$$\boxed{f(x) \geq m}$$

Quindi $f(x) \geq m$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e per il Teorema di W. classico $\to$ $\exists x_0 \in \overline{B_R(0)}$ t.c. $f(x_0) = m$

→ Ho trovato il min su tutto $\mathbb{R}^n$.

Teorema (W gen)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se } f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ continua e} \\ \boxed{\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty} \\ \Downarrow \\ \lim_{x\to\infty} \\ \text{Allora } \exists \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\end{array}}$$

Analisi 1d (fenore)

Per studiare localmente una funzione nell'intorno di un punto stazionario

↳ $f'(x_0) = 0$

↳ si studiava il segno della derivata seconda $f''(x)$

→ $f''(x_0) > 0$ → min locale

Analisi in più variabili

↳ Derivate "successive" per funzioni di più variabili

Derivate parziali "prime" $\longrightarrow$ Derivate parziali "seconde"

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \longrightarrow$$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Esempio $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + y^3 + x^4 \cdot y^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4x^3y^5 \leftarrow = g(x,y) \Leftarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 5x^4y^4 \leftarrow = h(x,y) \leftarrow$$

4 possibilità:

$$g \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} \to \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} \to \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy} \end{cases}$$

$$h \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} \to \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y} \to \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \end{cases}$$

Der parziali prime $\to 2 \cdot 2 = 4 \leftarrow$ der parziali seconde

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to n \cdot n = n^2 \leftarrow$ der. parziali seconde

OSS

In generale per una funzione di n variabili ci sono n derivate parziali "prime" e n^2 derivate parziali "seconde"

Il metodo di calcolo è sempre lo stesso

↳ es

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x + 4x^3y^5 \longrightarrow f_{xx} = 2 + 12x^2y^5$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3y^2 + 5x^4y^4$

$\boxed{f_{xy}} = 20x^3 \cdot y^4$

$f_{yy} = 6y + 20x^4y^3$

$\boxed{f_{yx}} = 20x^3y^4$

$= ?$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Teorema (di inversione dell'ordine di derivazione)

Se f_{xy} $\left(\frac{\partial f}{\partial y \partial x}\right)$ e f_{yx} $\left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right)$ esistono in un intorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sono continue nel punto (x_0, y_0) allora coincidono, ovvero

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

↳ "non conta l'ordine con cui derivo nel calcolare le derivate parziali successive"

2 der parziali prime
3 der parziali seconde
4 der. parziali terze

$f_x \quad f_y$

$f_{xx} \quad f_{xy} = f_{yx} \quad f_{yy}$

$f_{xxx} \quad f_{xyx} = f_{yxx} \quad f_{xyy} = f_{yxy} \quad f_{yyy}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Derivate parziali prime $\rightarrow$ $\nabla f = (f_x, f_y)$

VETTORE GRADIENTE

Stazionarietà di (x_0, y_0) $\Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$

Le derivate parziali seconde $\rightarrow$ formano una MATRICE

Def.

Si dice MATRICE HESSIANA la matrice formata dalle derivate seconde e si denota con Hf

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Hf = \begin{pmatrix} \boxed{f_{xx} \quad f_{xy}} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

OSS Se le derivate parziali seconde esistono e sono continue $\Longrightarrow$ Hf è simmetrica

" Tutte le condizioni in analisi 1d coinvolgono il segno della derivata seconda, nell'analisi in più variabili coinvolgono la segnatura della matrice hessiana.

Ripassate: cosa significa essere def. positiva / negativa ....