Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

8 aprile 2021

Esercizio 1 Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = xy(x^2+y^2-4)$ sul dominio

$$A = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, |y| \le x\right\}.$$

Soluzione
La funzione f è continua e il dominio A è compatto, quindi, per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo.

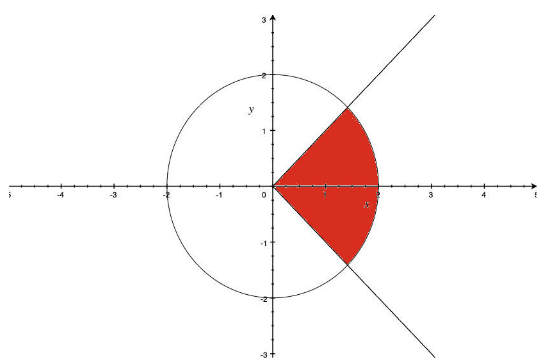
Cerchiamo prima nei punti interni al dominio dove il gradiente si annulla.

$$f_x = y(x^2+y^2-4+x\,2x) = y(3x^2+y^2-4), \qquad f_y = x(x^2+y^2-4+y\,2y) = x(x^2+3y^2-4).$$

Il gradiente di f si annulla quindi se

$$\begin{cases} y(3x^2+y^2-4) = 0 \\ x(x^2+3y^2-4) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si annulla per $y=0$ oppure se $3x^2+y^2-4=0$. Esaminiamo prima il caso $y=0$ e sostituiamo nella seconda equazione ottenendo $x(x^2-4)=0$ che ha come soluzioni $x=0,\ x=-2,\ x=2$. Quindi abbiamo trovato i punti $(0,0),\ (-2,0)$ e $(2,0)$.
Se invece $3x^2+y^2-4=0$ abbiamo $y^2 = 4-3x^2$ che andiamo a sostituire nella seconda equazione ottenendo $x\left(x^2+3(4-3x^2)-4\right)=0$ che ha come soluzioni $x=0$ oppure $x^2+3(4-3x^2)-4=0$. Se $x=0$ allora, sostituendo in $y^2=4-3x^2$ otteniamo $y^2=4$, quindi $y=-2$ oppure $y=2$. Abbiamo trovato i punti $(0,0),\ (0,-2)$ e $(0,2)$. Se invece $x^2+3(4-3x^2)-4=0$ abbiamo $8-8x^2=0$ che ha come soluzioni $x=-1$ oppure $x=1$. Sostituendo nuovamente in $y^2=4-3x^2$ abbiamo $y^2=1$, quindi $y=-1$ oppure $y=1$. Aggiungiamo quindi i punti $(-1,-1),\ (-1,1),\ (1,-1)$ e $(1,1)$. Abbiamo quindi 9 punti stazionari, ma nessuno è interno al dominio A. Infatti l'insieme A è il seguente settore circolare



e i punti trovati sono esterni ad A oppure appartengono alla frontiera. Esaminiamo quindi la frontiera di A suddividendola in tre curve. La prima è il segmento di retta

$$\gamma(t) = (t,t),\ 0 \le t \le \sqrt{2}.$$

Su tale curva la funzione diventa

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = f(t,t) = t^2(2t^2-4) = 2t^4-4t^2.$$

Deriviamo la funzione ottenendo $\varphi'(t) = 8t^3-8t = 8t(t^2-1)$ che si annulla per $t=0,\ t=-1$ e $t=1$. Scartando $t=-1$ che è fuori dominio, restano $t=0$ e $t=1$ che corrispondono ai punti $(0,0)$ e $(1,1)$.
La seconda curva è il segmento di retta

$$\alpha(t) = (t,-t),\ 0 \le t \le \sqrt{2}.$$

La funzione sulla curva diventa

$$\psi(t) = f(\alpha(t)) = f(t,-t) = -t^2(2t^2-4) = -\varphi(t).$$

I calcoli sono uguali a quelli fatti per φ che ci restituiscono i punti $(0,0)$ e $(1,-1)$. La terza curva è l'arco di circonferenza

$$\beta(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}.$$

Avremo quindi

$$g(t) = f(\beta(t)) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4\cos t \sin t(4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 4) = 0.$$

La funzione quindi è identicamente nulla su questo arco di frontiera.
Per determinare il massimo e il minimo dovremo quindi confrontare i valori assunti dalla funzione nei punti trovati. Dovremmo anche controllare i vertici del dominio, che sono l'origine e due punti che sono tuttavia compresi nell'arco di circonferenza. Quindi

$$f(1,1) = 1(1+1-4) = -2, \qquad f(1,-1) = -1(1+1-4) = 2, \qquad f(0,0) = 0$$

e $f(x,y) = 0$ sull'arco di circonferenza. Otteniamo che il minimo vale -2 e il massimo 2.

Esercizio 2 Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = \sqrt{y \sin x}$ sul dominio

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi,\ 1 \leq y \leq 2\right\}.$$

Soluzione
Il dominio è compatto e la funzione è continua, quindi ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

Calcoliamo il gradiente e vediamo se si annulla nei punti interni.

$$f_x = \frac{y\cos x}{2\sqrt{y\sin x}}, \qquad f_y = \frac{\sin x}{2\sqrt{y \sin x}}.$$

Avremo quindi che $\nabla f(x,y) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{y\cos x}{2\sqrt{y\sin x}} = 0 \\ \\ \dfrac{\sin x}{2\sqrt{y\sin x}} = 0. \end{cases}$$

Considerato che $y \geq 1$ e che $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ abbiamo che la prima equazione ha come unica soluzione $x = \frac{\pi}{2}$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} = 0$$

che non ha soluzione. Il gradiente quindi non si annulla mai nel dominio considerato. Il massimo e il minimo si trovano sul bordo del dominio che è un rettangolo. Il bordo inferiore è il segmento descritto dalla curva

$$\alpha(t) = (t,1), \qquad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi.$$

La funzione sulla curva diventa

$$g(t) = f(\alpha(t)) = f(t,1) = \sqrt{\sin t}.$$

Deriviamo per trovare eventuali candidati punti di massimo o minimo

$$g'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}$$

che si annulla per $t = \frac{\pi}{2}$, corrispondente al punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$.
Il lato destro del rettangolo è descritto dalla curva

$$\beta(t) = \left(\frac{5}{6}\pi, t\right), \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

Componendo con la funzione abbiamo

$$h(t) = f(\beta(t)) = \sqrt{t \sin\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{\frac{t}{2}}$$

la cui derivata

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2t}}$$

non si annulla mai.
Il lato superiore del rettangolo è descritto dalla curva

$$\gamma(t) = (t, 2), \qquad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi.$$

Risulta quindi

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = \sqrt{2\sin t}, \qquad \varphi'(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{2\sin t}}$$

che si annulla solo per $t = \frac{\pi}{2}$, corrispondente al punto $(\frac{\pi}{2}, 2)$. Il lato sinistro del rettangolo è dato da

$$\delta(t) = \left(\frac{\pi}{6}, t\right), \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

In questo caso avremo

$$\psi(t) = f(\delta(t)) = \sqrt{t \sin\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Come per il lato destro la derivata non si annulla mai. Aggiungiamo i quattro vertici del rettangolo e confrontiamo i valori assunti dalla funzione nei punti trovati.

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) = \sqrt{2\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

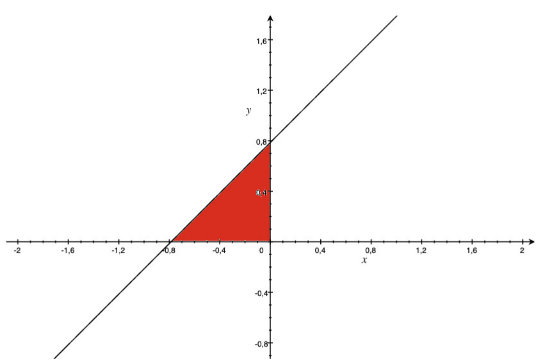
$$f\left(\frac{5\pi}{6}, 1\right) = \sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}, 2\right) = \sqrt{2\sin\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2\,\frac{1}{2}} = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}, 2\right) = \sqrt{2\sin\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2\,\frac{1}{2}} = 1.$$

Il massimo della funzione è quindi $\sqrt{2}$ e il minimo $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 3 Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(x - y)$ sul dominio

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + \frac{\pi}{4},\ x \leq 0\right\}.$$

Soluzione
Il dominio A è il triangolo rettangolo descritto in rosso nella figura seguente



La funzione è continua e il dominio è compatto, quindi esistono sicuramente massimo e minimo per il teorema di Weiestrass. Cerchiamo nei punti interni dove si annulla il gradiente.

$$f_x = 2x\sin(x - y) + (x^2 + y^2)\cos(x - y), \quad f_y = 2y\sin(x - y) - (x^2 + y^2)\cos(x - y).$$

Avremo allora che $\nabla f(x, y) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} 2x\sin(x - y) + (x^2 + y^2)\cos(x - y) = 0 \\ 2y\sin(x - y) - (x^2 + y^2)\cos(x - y) = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni otteniamo la condizione

$$2(x + y)\sin(x - y) = 0$$

che ha come soluzioni $x+y=0$ oppure $\sin(x-y)=0$.
Se $x+y=0$ allora $y=-x$ e, sostituendo nella prima equazione, otteniamo

$$2x\sin(2x)+2x^2\cos(2x)=0 \iff 2x\left(\sin(2x)+x\cos(2x)\right)=0.$$

Le soluzioni sono $x=0$ oppure $\sin(2x)+x\cos(2x)=0$.
Se $x=0$, dalla condizione $x+y=0$ avremo anche $y=0$, quindi il punto $(0,0)$ che è sulla frontiera di A. Osserviamo ora che

$$\sin(2x)+x\cos(2x)=0 \iff x\cos(2x)=-\sin(2x) \iff x=-\tan(2x)$$

che, nell'intervallo $-\frac{\pi}{4}<x<0$, corrispondente ai punti interni del dominio A, non ha soluzione.
Resta da esaminare il caso $\sin(x-y)=0$ che ha come soluzione $x-y=k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ che rappresenta una serie di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Osserviamo che per nessun valore di $k\in\mathbb{Z}$ tai rette intersecano i punti interni di A.
Abbiamo quindi ottenuto che ∇f non si annulla mai nei punti interni di A, pertanto il massimo e il minimo si trovano sulla frontiera. Parametrizziamo il lato destro del triangolo tramite la curva

$$\alpha(t)=(0,t),\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{4}.$$

Avremo allora

$$g(t)=f(\alpha(t))=f(0,t)=t^2\sin(-t)=-t^2\sin t.$$

Osserviamo ora che le funzioni t^2 e $\sin t$ sono entrambe crescenti nell'intervallo considerato, quindi g è decrescente, pertanto assume massimo e minimo negli estremi, corrispondenti a due vertici del triangolo, che andranno comunque esaminati in seguito.
Passiamo ora al lato inferiore del triangolo che parametrizziamo come

$$\beta(t)=(t,0),\qquad -\frac{\pi}{4}\le t\le 0.$$

In questo caso

$$h(t)=f(\beta(t))=f(t,0)=t^2\sin t$$

che è crescente, quindi massimo e minimo sono nei vertici. L'ultimo lato del triangolo può essere parametrizzato come

$$\gamma(t)=(t,t+\frac{\pi}{4}),\qquad -\frac{\pi}{4}\le t\le 0$$

e la funzione su tale curva diventa

$$\varphi(t)=f(\gamma(t))=f\left(t,t+\frac{\pi}{4}\right)=\left(t^2+\left(t+\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2t^2+\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi^2}{16}\right).$$

Derivando otteniamo

$$\varphi'(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(4t+\frac{\pi}{2}\right)$$

quindi

$$\varphi'(t)=0 \iff 4t+\frac{\pi}{2}=0 \iff t=-\frac{\pi}{8}$$

che corrisponde al punto $(-\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{8})$. Valutiamo ora la funzione nei punti trovati e nei vertici del triangolo.

$$f\left(-\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{8}\right)=\left(\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi^2}{64}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=0,\qquad f(0,0)=0,\qquad f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{16}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$$

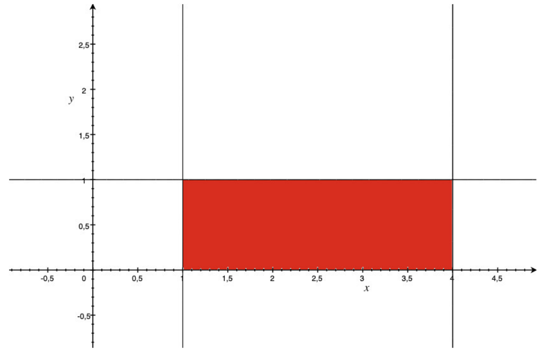
$$f\left(-\frac{\pi}{4},0\right)=\frac{\pi^2}{16}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}.$$

Il minimo della funzione è $-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$ mentre il massimo è 0.

Esercizio 4 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y)=\dfrac{(x^4-y^2)}{x^2+y^2}$ sul dominio

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x\le 4, 0\le y\le 1\right\}.$$

Soluzione
Il dominio è il rettangolo rosso in figura



che è compatto, quindi f, che è continua, ha massimo e minimo. Calcoliamo il gradiente per vedere se si annulla in punti interni ad A.

$$f_x = \frac{4x^3(x^2+y^2)-(x^4-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_y = \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^4-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Il gradiente si annulla quando si annullano i numeratori delle derivate parziali, quindi

$$\begin{cases} 4x^3(x^2+y^2)-(x^4-y^2)2x=0 \\ -2y(x^2+y^2)-(x^4-y^2)2y=0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$0 = 2x(2x^2(x^2+y^2)-(x^4-y^2)) = 2x(2x^4+2x^2y^2-x^4+y^2) = 2x(x^4+2x^2y^2+y^2).$$

L'equazione è verificata quando $x=0$ oppure quando $x^4+2x^2y^2+y^2=0$.
Il caso $x=0$ deve essere scartato perché nel dominio A è sempre $x \geq 1$.
Osserviamo ora che la quantità $x^4+2x^2y^2+y^2$ è somma di termini non negativi, quindi si annulla solo quando tutti i termini sono contemporaneamente nulli, in particolare $x^4=0$ e $y^2=0$ quindi $(x,y)=(0,0)$ che nuovamente è un punto non appartenente al dominio.
Risulta quindi $\nabla f \neq 0$ in tutti i punti di A, di conseguenza il massimo e il minimo si trovano sulla frontiera di A.
Il lato inferiore del rettangolo è descritto dalla curva

$$\alpha(t) = (t,0), \qquad 1 \leq t \leq 4$$

che, composta con la funzione, risulta

$$g(t) = f(\alpha(t)) = f(t,0) = \frac{t^4}{t^2} = t^2.$$

La funzione g è crescente quindi ha massimo e minimo negli estremi, che corrispondono a vertici del rettangolo.
Parametrizziamo il lato destro, ottenendo

$$\beta(t) = (4,t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$h(t) = f(\beta(t)) = f(4,t) = \frac{256-t^2}{16+t^2}$$

$$h'(t) = \frac{-2t(16+t^2)-(256-t^2)2t}{(16+t^2)^2} = \frac{-544t}{(16+t^2)^2} \leq 0 \ \forall t \in [0,1].$$

La funzione h è quindi decrescente e assume massimo e minimo negli estremi, come nel caso precedente.
Il lato superiore è dato da

$$\gamma(t) = (t,1), \qquad 1 \leq t \leq 4$$

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = f(t,1) = \frac{t^4-1}{t^2+1} = \frac{(t^2+1)(t^2-1)}{t^2+1} = t^2-1$$

che è crescente nell'intervallo considerato. Non ci sono quindi punti da considerare su questo lato, a parte i vertici.
L'ultimo lato è parametrizzato da

$$\delta(t) = (1,t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\psi(t) = f(\delta(t)) = f(1,t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\psi'(t) = \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}.$$

Anche questa funzione è decrescente e non fornisce altri punti oltre ai vertici.
Valutiamo la funzione nei quattro vertici per determinare il massimo e il minimo.

$$f(1,0) = \frac{1}{1} = 1, \qquad f(4,0) = \frac{256}{16} = 16, \qquad f(4,1) = \frac{256-1}{16+1} = \frac{255}{17} = 15, \qquad f(1,1) = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

Il minimo di f è quindi 0, mentre il massimo è 16.

Esercizio 5 Sia $f(x,y) = xy^2 - yx^2$. Trovare il massimo e il minimo assoluti di f in

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}.$$

Soluzione
L'insieme D è compatto e f è continua, quindi ammette massimo e minimo assoluti su tale insieme. La funzione è differenziabile, quindi se avesse dei punti di massimo o di minimo interni a D si dovrebbe annullare il gradiente.

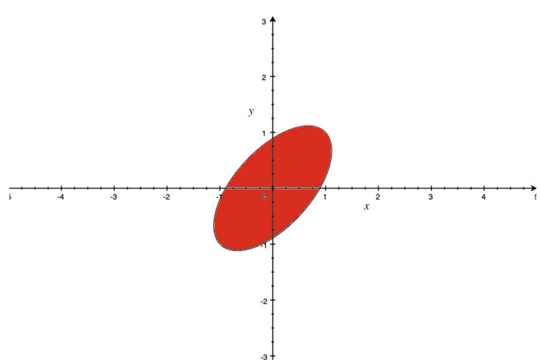
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2.$$

L'unico punto dove $\nabla f = 0$ è $(0,0)$, quindi nei punti interni a D non ci possono essere massimi o minimi. I punti di massimo e di minimo si trovano quindi sulla frontiera di D. Consideriamo le restrizioni della f alla frontiera. L'insieme D è un triangolo con due lati sugli assi cartesiani e come terzo lato la retta $y = 1-x$. Sugli assi cartesiani abbiamo $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Sul terzo lato definiamo $\phi(x) = f(x, 1-x) = x(1-x)^2 - (1-x)x^2 = 2x^3 - 3x^2 + x$. Risulta $\phi'(x) = 6x^2 - 6x + 1$ che si annulla per $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ e per $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Osserviamo che i punti corrispondenti sono $P = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ e $Q = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$. Valutando la f in tali punti si osserva che $f(P) = \frac{\sqrt{3}}{18}$ e $f(Q) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$. Quindi il massimo assoluto di f su D è $\frac{\sqrt{3}}{18}$ mentre il minimo assoluto è $-\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Esercizio 6 Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 5y^2 - 6xy \leq 4\right\}$$

tenendo presente che il dominio è limitato. Facoltativo: dimostrare che D è limitato. **Soluzione**
Il dominio D è l'ellisse colorata in rosso nella figura seguente



che è un insieme chiuso perché sottolivello della funzione continua

$$\Phi(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4.$$

Il dominio D è anche limitato (lo verificheremo alla fine dell'esercizio), quindi per il teorema di Weierstrass la funzione f, che è continua, ha massimo e minimo su D. Cerchiamo i punti interni a D dove si annulla ∇f.

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 2y$$

quindi $\nabla f(x,y) = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$.

Controlliamo ora i punti della frontiera utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il vincolo che descrive la frontiera è $\Phi(x, y) = 0$, quindi procediamo a calcolare il gradiente di Φ:

$$\Phi_x = 10x - 6y, \qquad \Phi_y = 10y - 6x.$$

Osserviamo che $\nabla\Phi(x, y) = 0$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$ e il punto $(0, 0)$ non appartiene al vincolo, quindi il sistema

$$\begin{cases} \nabla\Phi(x, y) = 0 \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Passiamo quindi a cercare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda\nabla\Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x = \lambda(10x - 6y) \\ 2y = \lambda(10y - 6x) \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $x = 0$ non risolve il sistema, perché, sostituendo nella prima equazione, otteniamo $0 = -6\lambda y$, quindi $y = 0$ oppure $\lambda = 0$. Se fosse $y = 0$ allora avremmo $x = y = 0$ che nella terza equazione darebbe luogo a $-4 = 0$. Se fosse $\lambda = 0$ avremmo $2y = 0$ dalla seconda equazione, e saremmo nella stessa situazione di prima. Per analoghi motivi anche $y = 0$ non risolve il sistema. Allora possiamo moltiplicare la prima equazione per y e la seconda per x ottenendo

$$\begin{cases} 2xy = \lambda y(10x - 6y) \\ 2xy = \lambda x(10y - 6x) \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le prime due equazioni abbiamo

$$\lambda y(10x - 6y) = \lambda x(10y - 6x).$$

Dato che, come osservato prima, $\lambda = 0$ non è ammissibile, possiamo dividere per λ ottenendo

$$y(10x - 6y) = x(10y - 6x) \iff -6y^2 = -6x^2 \iff y = x \text{ oppure } y = -x.$$

Se sostituiamo $y = x$ nella terza equazione otteniamo

$$5x^2 + 5x^2 - 6x^2 - 4 = 0 \iff -x^2 - 4 = 0 \iff x = 1 \text{ oppure } x = -1.$$

Poiché $y = x$ abbiamo le soluzioni $(x, y) = (1, 1)$, $(x, y) = (-1, -1)$. In corrispondenza di $x = y = 1$, dalla prima equazione otteniamo

$$2 = \lambda(10 - 6) \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

mentre per $x = y = -1$ avremo

$$-2 = \lambda(-10 + 6) \iff \lambda = \frac{1}{2}.$$

Se invece $x = -y$, dalla terza equazione abbiamo

$$5x^2 + 5x^2 + 6x^2 - 4 = 0 \iff 16x^2 = 4 \iff x = \frac{1}{2} \text{ oppure } x = -\frac{1}{2}.$$

Dato che $x = -y$ otteniamo i punti $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ricaviamo anche in questo caso i moltiplicatori dalla prima equazione

$$x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\,\frac{1}{2} = \lambda\left(\frac{10}{2} + \frac{6}{2}\right) \iff 1 = 8\lambda \iff \lambda = \frac{1}{8}$$

$$x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda\left(\frac{-10}{2} - \frac{6}{2}\right) \iff -1 = -8\lambda \iff \lambda = \frac{1}{8}.$$

Abbiamo quindi risolto il sistema ottenendo le soluzioni

$$(x, y, \lambda) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \ (x, y, \lambda) = \left(-1, -1, \frac{1}{2}\right), \ (x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), \ (x, y, \lambda) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right).$$

Sostituiamo tutti i punti ottenuti nella funzione per capire quanto valgono massimo e minimo.

$$f(0,0) = 0, \ f(1,1) = 2, \ f(-1,-1) = 2, \ f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \ f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Il minimo di f vale 0, mentre il massimo vale 2.

Vediamo ora come dimostrare che il dominio D è limitato.

Useremo la disuguaglianza

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

che si ottiene direttamente da

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy.$$

Osserviamo che se $(x, y) \in D$ allora

$$4 \geq 5x^2 + 5y^2 - 6xy \geq 5x^2 + 5y^2 - 6\frac{x^2 + y^2}{2} = 2(x^2 + y^2).$$

Quindi se $(x, y) \in D$ risulta che $x^2 + y^2 \leq 2$. In altri termini il dominio D è contenuto nella palla chiusa di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, quindi è limitato.