# ESERCITAZIONE 08/04

## Esercizio 6 :

$f(x,y) = x^2+y^2$ (= quadrato della distanza di $(x,y)$ da $(0,0)$)

massimo e minimo su

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2+5y^2-6xy \leq 4 \}$$

(supponendo che D sia limitato)

Usiamo il "metodo classico":

(D è chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto, f continua $\Rightarrow \exists$ max, min)

① punti stazionari interni a D di f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ l'unico pto stazionario è $(0,0)$.

È un punto interno a D ?

Sostituisco le coordinate nella disug. che definisce D :

$$5x^2+5y^2-6xy \leq 4$$

$(x,y)=(0,0) \rightsquigarrow 5\cdot 0+5\cdot 0-6\cdot 0\cdot 0 \leq 4$ ?

$0+0-0 \leq 4$ ✓

e vale anche $<$, quindi $(0,0)$ è

interno a D.

Calcoliamo $\boxed{f(0,0) = 0^2+0^2 = 0}$

(si può già dire che questo è il min. di $f$ su D, perché $f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$ $\forall\, x,y$.)

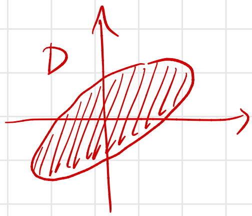
② punti singolari (interni a D)

Non ne esistono, perché

$\nabla f = (2x, 2y)$ è definito su tutto D (su tutto $\mathbb{R}^2$).

③ studio di $f$ ristretta al bordo di D

↳ definito da $\Phi(x,y) = 5x^2+5y^2-6xy-4=0$

(disegno: 

)

non serve

Usiamo il metodo dei molt. di Lagrange.

① $\begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \\ \nabla\Phi(x,y) = 0. \end{cases}$ (punti "brutti" del bordo)

$\nabla\Phi = (10x-6y,\, 10y-6x)$

$\begin{cases} 5x^2+5y^2-6xy-4=0 \\ 10x-6y=0 \\ 10y-6x=0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x = \frac{3}{5}y$

$\rightsquigarrow$ $10y - \frac{18}{5}y = 0 \Rightarrow y\left(10-\frac{18}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow y = 0$

Quindi $x = \frac{3}{5} \cdot 0 = 0$

L'unico punto in cui $\nabla \Phi = (0,0)$ è $(x,y)=(0,0)$, che però non soddisfa $\Phi(x,y)=0$ (non sta sul bordo di $D$)

Quindi il sistema 1 non ha soluzioni.

2 $\begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla \Phi(x,y) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2-6xy-4=0 \\ 2x = \lambda(10x-6y) \\ 2y = \lambda(10y-6x) \end{cases}$

"eliminare $\lambda$".

da $2x = \lambda(10x-6y)$ voglio scrivere $\lambda = \frac{2x}{10x-6y}$

Devo chiedermi cosa succede se $10x-6y=0$.

Segue che $2x = \lambda(10x-6y) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow x=0$, e da $10x-6y=0$ allora segue che anche $y=0$.

$\rightsquigarrow (x,y)=(0,0)$. Ma $(0,0)$ non sta sul bordo di $D$, quindi posso escludere queste soluzioni.

Quindi posso supporre che $10x-6y \neq 0$, e quindi posso scrivere $\boxed{\lambda = \frac{2x}{10x-6y}}$.

Faccio la stessa cosa con l'eq. $2y = \lambda(10y - 6x)$

(di nuovo, se $10y - 6x = 0$, seguirebbe che

$y = 0 \implies x = 0$, e come prima non

va bene, quindi posso supporre che $10y - 6x \neq 0$)

e scrivo $\boxed{\lambda = \dfrac{2y}{10y - 6x}}$.

Ora eguaglio le due espressioni che ho trovato

("elimino $\lambda$")

$$\frac{2x}{10x - 6y} = \frac{2y}{10y - 6x}$$

$$2x(10y - 6x) = 2y(10x - 6y)$$

$$\cancel{20xy} - 12x^2 = \cancel{20xy} - 12y^2 \implies x^2 = y^2$$

$$\implies x = \pm y$$

Ora uso l'equazione del bordo di D:

se $x = y$, diventa $5x^2 + 5x^2 - 6x^2 - 4 = 0$

$$4x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 1$$

$(1,1)$, $(-1,-1)$.

$\boxed{f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2}$, $\boxed{f(-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2}$

se $x=-y$, l'eq. del bordo di $D$ da

$(y=-x)$ $\quad 5x^2+5x^2+6x^2-4=0$

$16x^2=4 \qquad x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}$$

Ora confrontiamo i valori di $f$ che abbiamo calcolato, e scopriamo che:

il minimo è 0 (in $(x,y)=(0,0)$)

il massimo è 2 (in $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$.)

---

Come mai $D$ è limitato?

- (truccoso): si usa la disuguaglianza

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

(segue da $\quad (x-y)^2 \ge 0$

$x^2-2xy+y^2 \ge 0$

$x^2+y^2 \ge 2xy$ )

se $(x,y) \in D \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 6xy \leq 4$

$$\left( xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow -xy \geq -\frac{x^2+y^2}{2} \right)$$

$$\underbrace{5x^2+5y^2-3(x^2+y^2)}_{=\,2(x^2+y^2)} \leq 5x^2+5y^2-6xy \leq 4$$

$\Rightarrow$ se $(x,y) \in D$, allora

$x^2+y^2 \leq 2$

$\Rightarrow$ $(x,y)$ e' nel disco di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $D$ e' limitato.

- (meno truccoso):

$(x,y) \in D \Leftrightarrow 5x^2+5y^2-6xy-4 \leq 0$

Considero la diseq. come una diseq. di grado 2 in $x$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 \leq 0$$

$$Ax^2 + Bx + C \leq 0$$

$A = 5 \quad B = -6y$

$C = 5y^2 - 4$

soluzioni: $x$ in $[x_1, x_2]$ dove $x_1, x_2$ sono le soluzioni dell'eq. associata.

Quindi esistono soluzioni soltanto se l'eq. associata ammette almeno una soluzione.

Quindi il $\Delta$ dell'equazione di II grado deve essere $\geq 0$:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 36y^2 - 4 \cdot 5 \cdot (5y^2 - 4)$$
$$= 36y^2 - 100y^2 + 80$$
$$= -64y^2 + 80.$$

Affinché ci siano soluzioni, serve che

$$-64y^2 + 80 \geq 0 \implies y^2 \leq \frac{80}{64} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\implies -\sqrt{\frac{5}{4}} \leq y \leq \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Ripetendo il ragionamento scambiando $x$ e $y$, trovo anche che $-\sqrt{\frac{5}{4}} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{4}}$.

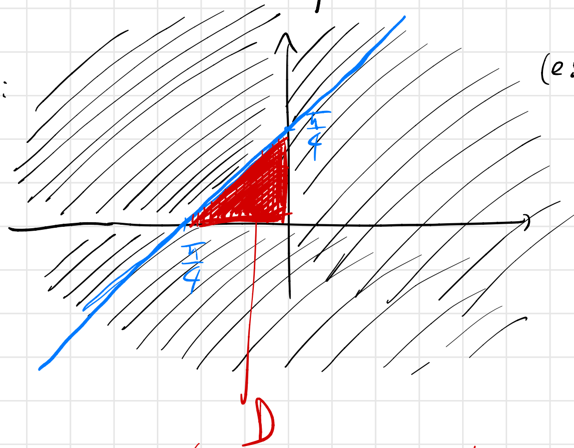
Questo mi fa vedere che $D$ è limitato.

---

**Esercizio 3**: max/min di $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(x-y)$

su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x + \frac{\pi}{4},\ x \le 0 \}$

Disegnamo $A$:




(escluso)

$y = x + \frac{\pi}{4}$ retta passa per $(0, \frac{\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

(bordo compreso)

"metodo classico":

① punti stazionari: $\nabla f = \Big( 2x\sin(x-y) + (x^2+y^2)\cos(x-y)\cdot 1,$

$2y\sin(x-y) + (x^2+y^2)\cdot\cos(x-y)\cdot(-1) \Big)$

sistema:
$$\begin{cases} 2x\sin(x-y) + (x^2+y^2)\cos(x-y) = 0 \\ 2y\sin(x-y) - (x^2+y^2)\cos(x-y) = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni trovo

$$2x\sin(x-y) + \cancel{(x^2+y^2)\cos(x-y)} + 2y\sin(x-y) - \cancel{(x^2+y^2)\cos(x-y)} = 0$$

$$2(x+y)\sin(x-y) = 0$$

Quindi se $(x,y)$ risolve il sistema, allora

o $x+y=0$ oppure $\sin(x-y)=0$

$\downarrow$

$y=-x$,

sostituendo in una delle due eq. del sistema trovo

$$2x\sin(2x)+2x^2\cdot\cos(2x)=0$$

$$2x\left(\sin(2x)+x\cos(2x)\right)=0$$

$x=0$

$\Downarrow$

$y=0$

$(0,0)$ e' soluzione, ma non e' un punto interno a D, quindi per il momento lo escludo.

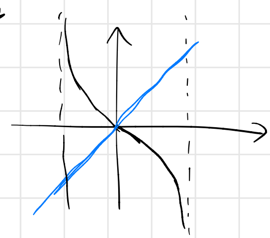
$$\sin(2x)+x\cos(2x)=0$$

$$x\cos(2x)=-\sin(2x) \qquad \left(-\frac{\pi}{4}<x<0\right)$$

$$x=-\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \qquad -\frac{\pi}{2}<2x<0$$

$$x=-\tan(2x)$$

e questa non ha sol. per $-\frac{\pi}{4}<x<0$



$\downarrow$

$\sin(x-y)=0 \Rightarrow x-y=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

(nessuna di queste rette interseca l'interno di D, quindi non ci sono sol. di questo tipo nell'interno di D)

---

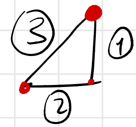
Quindi non ci sono punti stazionari interni.

(2) pti singolari interni non ce ne sono, perché

Df è definito su tutto $\mathbb{R}^2$.

(3) studio del bordo.

Conviene parametrizzare i tre segmenti:




(1) $(0,t) \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

$$g(t) = f(0,t) = t^2 \cdot \sin(-t) = -t^2 \sin(t)$$

è una funzione decrescente su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

quindi ha max in $t=0$ $\qquad \boxed{g(0) = 0}$

e minimo in $t = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \boxed{g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $(t,0) \qquad -\frac{\pi}{4} \le t \le 0$

$$h(t) = f(t,0) = t^2 \cdot \sin(t)$$

$$h'(t) = 2t\sin t + t^2\cos(t) = 0$$

$$t(2\sin(t) + t\cos(t)) = 0$$

$t = 0$

$$2\sin(t) + t\cos(t) = 0$$

$$t\cos(t) = -2\sin(t)$$

$$t = -2\tan(t)$$

come prima, non ci sono sol. in $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

Quindi non ci sono pti staz. interni.

Calcolo h negli estremi:

$$\boxed{h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$$

$$\boxed{h(0) = 0.}$$

3 $\left(t,\ t+\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad -\frac{\pi}{4}\le t\le 0.$

$$k(t) = f\left(t, t+\frac{\pi}{4}\right) = \left(t^2+\left(t+\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t^2+t^2+\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi^2}{16}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2t^2+\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi^2}{16}\right)$$

$$k'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(4t+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad t = -\frac{\pi}{8}$$

sta in $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

Calcolo k nel pto stazionario trovato e negli estremi:

$$\boxed{k\left(-\frac{\pi}{8}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\cdot\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi^2}{16}\right)$$

$$= (\ldots) = \boxed{-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}}$$

(ho già calcolato il valore negli estremi studiando i primi 2 segmenti).

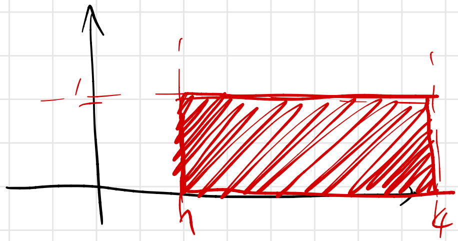
Confrontando tutti i valori trovati vediamo che il massimo è 0, e il minimo è $-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$.

---

<u>Esercizio 4</u>: max/min $\quad f(x,y) = \frac{(x^4-y^2)}{x^2+y^2}$

su $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 \ , \ 0 \leq y \leq 1\}$

A è un rettangolo,




"metodo classico":

① pti stazionari interni:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3(x^2+y^2)-(x^4-y^2)(2x)}{\cancel{(x^2+y^2)^2}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^4-y^2)(2y)}{\cancel{(x^2+y^2)^2}} = 0 \end{cases}$$

$$4x^3(x^2+y^2)-(x^4-y^2)(2x) = 2x\left(2x^2(x^2+y^2)-x^4+y^2\right)$$
$$= 2x\left(2x^4+2x^2y^2-x^4+y^2\right)$$
$$= 2x\left(x^4+2x^2y^2+y^2\right) = 0$$

$x = 0$

è escluso perché
non ci sono punti
interni a D
con $x=0$.

$\downarrow$

$x^4+2x^2y^2+y^2=0$.

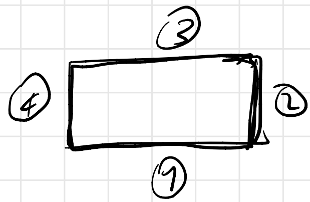
somma di termini non-negativi
per essere $=0$, devono
essere $=0$ tutti i termini.
In particolare $x^4=0$
$\Rightarrow x=0$

di nuovo, questo è
escluso nell'interno
di D.

Quindi non ci sono
punti stazionari
interni a D.

(2) punti singolari
interni a D, non ce ne sono.

(3) analisi del bordo.




(1) $(t,0)$ $\quad 1\le t\le 4$

$$g_1(t)=f(t,0)=\frac{t^4}{t^2}=t^2 \quad \text{crescente in } [1,4]$$

quindi max/min sono negli estremi:

$$\boxed{g_1(1)=1}$$
$$\boxed{g_1(4)=16}$$

(2) $(4,t)$ $\quad 0\le t\le 1$

$$g_2(t)=f(4,t)=\frac{256-t^2}{16+t^2}$$

$$g_2'(t) = \frac{(-2t)(16+t^2) - (256-t^2)(2t)}{(16+t^2)^2} =$$

$$= \frac{-544t}{(16+t^2)^2} \leq 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

$g_2$ è decrescente su $[0,1]$

$$\boxed{g_2(0) = \frac{256}{16} = 16}$$

$$\boxed{g_2(1) = \frac{255}{17} = 15}$$

(3) $(t,1) \quad 1 \leq t \leq 4$

$$g_3(t) = f(t,1) = \frac{t^4-1}{t^2+1} = t^2 - 1$$ crescente in $[1,4]$

$$\boxed{g_3(1) = 0}$$

$$\boxed{g_3(4) = 15}$$

(4) $(1,t) \quad 0 \leq t \leq 1$

$$g_4(t) = f(1,t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} =$$

$$g_4'(t) = (\ldots) \leq 0$$

gli estremi li ho già considerati

Confrontando i valori trovati, il minimo di

$f$ è $0$, e il massimo è $16$.