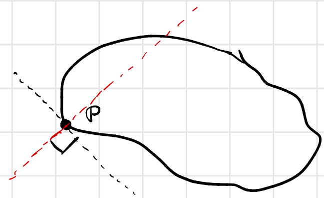
ESERCITAZIONE 19/04

12) equazione della retta perpendicolare alla curva $x^4 - 4y^2(2-x^2) = 0$ nel suo punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.



Cosa da usare: il gradiente

$\nabla f(x_0, y_0)$ è perpendicolare alla curva di livello di f passante per (x_0, y_0).

per $\lambda = 0$

La mia curva è una curva di livello della funzione $f(x,y) = x^4 - 4y^2(2-x^2)$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(4x^3 - 4y^2(-2x)\,,\ -8y(2-x^2)\right)$$

$$\underbrace{\nabla f\left(1, \tfrac{1}{2}\right)} = \left(4 \cdot 1 - 4 \cdot \tfrac{1}{4}(-2 \cdot 1)\,,\ -8\tfrac{1}{2}(2-1)\right)$$

vettore perpendicolare alla curva nel suo punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$$= (4+2\,,\ -4) = (6, -4).$$

Devo scrivere l'eq. della retta nel piano xy con vettore direzione $(6, -4)$ e passante per $\left(1, \frac{1}{2}\right)$:

$ax+by+c=0$, (a,b) è un vettore $\perp$ alla retta.

Devo prendere $(a,b) \perp (6,-4)$, ad esempio posso prendere $(4,6)$ $(\sim (2,3))$

(il prodotto scalare $(4,6)\cdot(6,-4) = 4\cdot 6 - 4\cdot 6 = 0$)

$2x+3y+c=0$. Impongo passaggio per $(1, \frac{1}{2})$

$2\cdot 1 + 3\cdot\frac{1}{2} + c = 0$ $\quad c = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow$ la retta cercata è $2x+3y-\frac{7}{2}=0$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{6} \qquad (c).$$

---

5). $F:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$

$f(t) = \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(perché $1+t^2 \geq 1 \Rightarrow \log(1+t^2) \geq \log(1) = 0$.
$\sqrt{2+t^2} \geq 0$)

Di conseguenza, visto che $x>0$, ho

$$\int_0^x f(t)\,dt \geq \int_0^x 0 \cdot dt = 0$$

Quindi $F(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow F$ è limitata inferiormente.

(b)

Altre risposte:

(c) falsa perché $f(t)$ è continua su $[0,+\infty)$

e quindi $\lim_{x\to 0^+} \int_0^x f(t)\,dt = 0$

per (a) e (d) bisogna come si comporta $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

(hint) $f(t) = \dfrac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}} \underset{t>>0}{\sim} \dfrac{2\log(t)}{\sqrt{t^2}} = 2\,\dfrac{\log(t)}{t} \geq 2\,\dfrac{1}{t}$

per $t>>0$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = +\infty \Rightarrow$ anche il nostro diverge.

---

10) $\sum_n \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+5}$ (la condizione necessaria è chiaramente soddisfatta)

se $\sum_n a_n$ converge, allora $a_n \to 0$

Conviene chiedersi se la serie converge assolutam.

$$\sum_n \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+5} \right| = \sum_n \frac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{2n+5} \leq \sum_n \frac{1}{2n+5}$$

diverge
quindi questa stima non mi dice niente.

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n = 4k+1 \\ -1 & \text{se } n = 4k+3 \end{cases}$$

n	
0	$\sin(0) = 0$
1	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
2	$\sin\pi = 0$
3	$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$
4	$\sin(2\pi) = 0$
5	$\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$
⋮	

Quindi per gli n pari, $\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+5} = 0$

quindi gli unici indici "importanti" sono i numeri dispari.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+5} = \sum_k \frac{(-1)^k}{2(2k+1)+5}$$

$n = 2k+1$

$k \geq 0$

$(-1)^k$ è $= 1$ k pari, $= -1$ k dispari

se k pari $= 2 \cdot h$, allora $2k+1 = 2 \cdot 2h+1 = 4h+1$

se k dispari $= 2h+1$, allora $2k+1 = 2(2h+1)+1 = 4h+3$

Quindi la mia serie è

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{4k+7}$$

Torniamo alla convergenza assoluta:

$$\sum_k \left| \frac{(-1)^k}{4k+7} \right| = \sum_k \frac{1}{4k+7} = +\infty$$

per C.A. con la serie armonica

$$\sum_k \frac{1}{k}.$$

La serie non converge assolutamente,

ma converge semplicemente per il criterio di Leibnitz, perché é della forma $\sum_k (-1)^k \cdot a_k$

dove $a_k = \dfrac{1}{4k+7}$ e' una funzione positiva, infinitesima, e decrescente. (c).

<u>Oss</u>: si puo' fare C.A. di $\dfrac{|\sin(\frac{n\pi}{2})|}{2n+5}$ con $\dfrac{1}{n}$?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{|\sin(\frac{n\pi}{2})|}{2n+5}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{2n+5}\right)}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}_{\to ??}$$

La successione $|\sin(\frac{n\pi}{2})|$ non ha limite per $n\to+\infty$, perché vale alternativam. 0 e 1.

Quindi nemmeno ha limite. e il C.A. non funziona.

Bisogna <u>prima</u> escludere gli n pari, notando che per n pari $\dfrac{|\sin(\frac{n\pi}{2})|}{2n+5} = 0$.

11.) $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

$f_{xx} + f_{yy}$

$$f_x = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x) + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{\cancel{x^2}}\right) = \frac{2x-y}{x^2+y^2}.$$

$$f_{xx} = \frac{2\cdot(x^2+y^2)-(2x-y)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^2-2x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2y) + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{2y+x}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2\cdot(x^2+y^2)-(2y+x)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$f_{xx} + f_{yy} = 0$.   (b).

6). $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ $\sqrt{2-x} = 0 \iff x = 2$, che è fuori dall'intervallo di integrazione.

Quindi l'unico "problema" è a $-\infty$.

Voglio cambiare variabile, e usare $t = 2-x$.

(così avrò $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}$ che so studiare)

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{M\to-\infty} \boxed{\int_{M}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}} = \lim_{M\to-\infty} \int_{2-M}^{1} \frac{-dt}{\sqrt{t}}$$

cambio variabile

$t = 2-x$

$dt = -dx$

$x = 1 \rightsquigarrow t = 1$

$x = M \rightsquigarrow t = 2-M$

$$= \lim_{M\to-\infty} \int_{1}^{2-M} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

, che so divergere.

$$\left(\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{conv. se } \alpha > 1 \end{cases} \right)$$

(d).

(Si poteva anche calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ usando una primitiva di $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ...)

7) La successione $a_n = n^{\sin(\cos(\frac{n\pi}{2}))}$

Come nella serie di prima, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=4k \\ 0 & \text{se dispari} \\ -1 & \text{se } n=4k+2 \end{cases}$

n	$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
0	1
1	0
2	-1
3	0
4	1
5	0
⋮	

la successione vale alternativamente

$$a_n = \begin{cases} n^{\sin(1)} & \text{se } n=4k \\ n^0 = 1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ n^{-\sin(1)} & \text{se } n=4k+2 \end{cases}$$

$$(\sin(1) > 0)$$

La ~~sottosuccessione~~ sottosuccessione $a_{4k} = (4k)^{\sin(1)} \longrightarrow +\infty$

" " $a_{4k+2} = (4k+2)^{-\sin(1)} \longrightarrow 0$

Quindi a_n non ha limite, e inoltre

- non ha massimo, perché $a_{4k} \to +\infty$
- non ha nemmeno minimo, perché

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e $\inf a_n = 0$

(perché ho una sottosucc.

che tende a 0)

Quindi a_n non ha né massimo né minimo (b).

8). $\Omega = \underbrace{\{1-3n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{} \cup \underbrace{\left\{\frac{5}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}}_{} \subseteq \mathbb{R}$

$\sup \Omega = ?$

$1, -2, -5, -8, \ldots$

$\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \ldots$

Entrambe le successioni $a_n = 1-3n$

$b_n = \frac{5}{n^2+2}$

sono strettamente decrescenti, quindi

$\sup \Omega = \max\left\{1, \frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2}$ (a)

← è anche $\max \Omega$.

9). $\sum_{n \geq 2} \frac{(\log n)^{\alpha n}}{n^3}$ $\qquad ((\log n)^n)^\alpha$

Oss: se per caso $\boxed{\alpha \leq 0}$ allora $((\log n)^n)^\alpha < 1$ per $n \geq 2$

quindi $\frac{(\log n)^{\alpha n}}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$

e per confronto, visto che (la serie è a termini positivi) e $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3}$ converge,

concludo che la mia serie converge.

Risposta (c).

(pensate a cosa succede per $\alpha > 0$).

---

4). $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$ (non è improprio, $x^2+1 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

$x^3 = x(x^2+1) - x$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -x^3 - x & x \\ // \ -x & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2}\Big[\log|x^2+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\big(\log(1+1) - \log(1)\big)$$

$$= \frac{1 - \log(2)}{2} \quad \text{(b)}.$$

1). $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{e^{2x}+x^4-x^3-2x}{e^{2x}+3+|x|+x^2}$

$f(x)$ e' definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

(il denomin. non si annulla mai)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}-\frac{x^3}{e^{2x}}-\frac{2x}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1+\frac{3}{e^{2x}}+\frac{|x|}{e^{2x}}+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{4}\,2}\overbrace{\left(\frac{e^{2x}}{x^4}+1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)}^{1}}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(\frac{e^{2x}}{x^2}+\frac{3}{x^2}+\frac{|x|}{x^2}+1\right)}_{1}} \to +\infty\cdot 1 = +\infty$$

Quindi $f(x)$ e' limitata inferiormente

(weierstrass generalizz.)

ma non superiormente.

(b)

---

2). $\{x\in\mathbb{R} \mid |\sin x|<1\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ per $k\in\mathbb{Z}\}$

$|\sin x| = 1 \iff x = \frac{\pi}{2}+k\pi$

è un insieme illimitato (d).

---

3) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log(1+t^2)}{t^2+2}\,dt \qquad F'(4) = ?$

$$G(x) = \int_1^{x} \frac{\log(1+t^2)}{t^2+2}\,dt .$$

$$\text{TFC} \implies G'(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2+2} \qquad G'(2) = \frac{\log(5)}{6}$$

Inoltre, $F(x) = G(\sqrt{x})$

$$F'(x) = G'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

$$x = 4 \leadsto F'(4) = G'(2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{\log(5)}{24} \quad (a).$$

(Cosa succederebbe se avevo $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$?

Supponendo che l'integrale improprio converga, non cambia niente, però bisogna fare un passaggio in più:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{\text{costante}} + \underbrace{\int_0^{x} f(t)\,dt}_{G(x)}$$

$F(x) = \text{costante} + G(x)$

$\Rightarrow F'(x) = G'(x)$