ESERCITAZIONE 22/04

2) Sviluppo di Taylor con $n=7$ in $x_0=0$ di $f(x)=\sin(3x^2)$

2 modi: – usare la formula generale

$$P_n(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\dots+$$

(in $x_0=0$)

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

calcolando tutte le derivate $f^{(k)}(0)$

per $k=0,\dots,n$ (7 in questo caso)

– partire da uno sviluppo "noto" e fare le sostituzioni appropriate.

Nel nostro caso ricordiamo che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+o(t^5)$$

per $t\to 0$

sostituendo $t=3x^2$ (ok perché $3x^2\to 0$ per $x\to 0$)

$$\sin(3x^2) = 3x^2 - \frac{(3x^2)^3}{3!}+\frac{(3x^2)^5}{5!}+o((3x^2)^5)$$

$$= 3x^2 - \frac{9}{2}x^6 + \frac{3^5}{5!}x^{10}+o(x^{10})$$

Questo è lo sviluppo di grado 10.

Per trovare quello di grado 7 ignoro le potenze di x più grandi di 7.

Quindi $P_7(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^6$ (a)

---

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(2n)^n} = \frac{+\infty}{+\infty}$ f. indeterminata.

Usiamo il criterio del rapporto: $a_n = \frac{3^n n!}{(2n)^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2(n+1))^{n+1}}}{\frac{3^n\cdot n!}{(2n)^n}} = \frac{3^{\cancel{n+1}}(n+1)!}{2^{\cancel{n+1}}(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{2^n}\cdot n^n}{\cancel{3^n}\cdot n!} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{e} = \frac{3}{2e} < 1$$

Per il crit. del rapporto quindi $a_n \to 0$ (a)

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \right.$$

$f(x) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$

$$= e^{\log\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x} = e^{x \log\left(1-\frac{1}{1+x}\right)} = \ldots$$

$t = -\frac{1}{1+x}$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

[vi riconducete a
$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$]

---

12) $f(x,y) = 3e^{(x-2)^2} + 5y^6$

punti stazionari ?

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{(x-2)^2} \cdot 2(x-2)\cdot 1 + 0 = 0 & \Rightarrow x = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 30y^5 = 0 & \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Unico pto stazionario è $(2,0)$.

Provando a usare l'Hessiana, trovo

$$f_{xx} = 6e^{(x-2)^2} \cdot 2(x-2)\cdot(x-2) + 6e^{(x-2)^2} \cdot 1$$
$$= 6e^{(x-2)^2}\left(2(x^2+4-4x)+1\right)$$
$$= 6e^{(x-2)^2} \cdot (2x^2-8x+9)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$f_{yy} = 150\, y^4$$

nel pto stazionario $(2,0)$ ho

$$f_{xx}(2,0) = 6 \cdot 1 \cdot (8-16+9) = 6$$

$$f_{yx}(2,0) = f_{xy}(2,0) = 0$$

$$f_{yy}(2,0) = 150 \cdot 0^4 = 0.$$

$$H(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ degenere! $\Rightarrow$ non concludiamo niente

Serve un'analisi "a occhio".

$f(x,y) = 3e^{(x-2)^2} + 5y^6$ è somma di due termini, $3e^{(x-2)^2}$ e $5y^6$, che in $(2,0)$ assumono il loro valore minimo possibile:

$$\underset{\forall x \in \mathbb{R}}{(x-2)^2 \geq 0} \Rightarrow 3e^{(x-2)^2} \geq 3e^0 = 3$$

$$\underset{\forall y \in \mathbb{R}}{5y^6 \geq 0}$$

Quindi $f(x,y) = 3e^{(x-2)^2} + 5y^6 \geq 3 + 0 = 3$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

e $f(2,0)=3$. Dunque $(2,0)$ è un minimo locale.

Visto che $(2,0)$ è l'unico punto stazionario e f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, non ci sono massimi locali (risposta (b)).

---

5) $$\int_0^{+\infty} (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right)dx.$$

integrale improprio. $f(x)=\cos(\sqrt{x})\cdot\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

è continua su $(0,+\infty)$.

Ha potenzialmente un problema in 0 a causa dell' $\frac{1}{x^3}$.

potrebbe non essere limitata in un intorno destro di 0

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$ e studiamo i due separatamente.

- $$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \cos(\sqrt{x})\cdot\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$$

per $x \to +\infty$, $\cos(\sqrt{x})$ non ha limite, e oscilla prendendo sia valori + che −

$\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \to 0$, ed è positivo per $x >> 0$.

La $f(x)$ non ha segno costante in nessun intorno di $+\infty$

Quindi sembra sensato provare a studiare la convergenza assoluta:

Studio $$\int_1^{+\infty} |\cos(\sqrt{x})| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right| dx = \int_1^{+\infty} |\cos(\sqrt{x})| \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) dx$$

$\left(\text{per } x \geq 1,\ \frac{1}{x^3} \leq 1 < \pi \implies \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \geq 0\right)$

visto che $|\cos(\sqrt{x})| \leq 1$, per confronto (semplice) posso studiare $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) dx$

$$\left(\int_1^{+\infty} |\cos(\sqrt{x})| \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) dx \leq \int_1^{+\infty} 1 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) dx \right)$$

ora usiamo il C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^3}$ $\left(\begin{array}{l} \sin(t) = t + o(t) \\ \Downarrow \\ \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{array} \right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

Quindi visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge (noto) per C.A. concludo che anche $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$ converge. Quindi per i ragionamenti fatti sopra, posso concludere che $\int_1^{+\infty} \cos(\sqrt{x})\cdot\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$ converge.

Rimane $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \cos(\sqrt{x})\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$

Come si comporta $f(x)$ per $x\to 0$?

$$\cos(\sqrt{x}) \longrightarrow \cos(\sqrt{0}) = \cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \longrightarrow \cancel{\sin(+\infty)\ ???}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ t=\frac{1}{x^3}}}{=} \lim_{t\to+\infty} \sin(t)$$ che non esiste.

Quindi $f(x)$ non ammette limite per $x \to 0$,
però è limitata!

(un prodotto $\cos(A) \cdot \sin(B)$ è sempre tra -1 e 1)

Definisco (arbitrariamente) $f(0) = 0$. Così:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \cos(\sqrt{x}) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

è <u>generalmente continua</u>, cioè è limitata e continua in tutti i punti tranne un numero finito (in questo caso uno solo, lo 0)

Una funzione generalmente continua è integrabile, quindi

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{x}) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) dx$$ esiste ed è un numero reale.

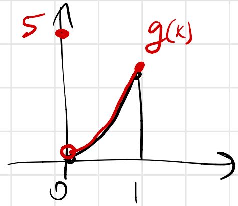
In conclusione, $$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) dx$$ converge. (C).

Alternativamente, $|f(x)| = |\cos(\sqrt{x})| \cdot \left|\sin \frac{1}{x^3}\right| \leq 1 \cdot 1 = 1$

quindi per confronto, visto che $\int_0^1 1 \cdot dx$ converge,

converge anche $\int_0^1 |f(x)|dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx$ converge.

$f(x)=x^2$ $\qquad f:[0,1]\to\mathbb{R}$



$\int_0^1 x^2 dx$

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\in(0,1] \\ 5 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$g(x)$ non è continua, ma è generalmente continua

e $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x^2 dx$

---

11) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2}$ $\qquad (x\neq 0)$

max/min locali? $\qquad f(x,y)$ è differenziabile su tutto il suo dominio.

Quindi devo solo guardare i punti stazionari.

$f(x,y)=x+\dfrac{y^3}{x^2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2\dfrac{y^3}{x^3} = 0 \longrightarrow 1 - 2 \cdot \dfrac{0^3}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \text{ ✗} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2/x^2 = 0 \Longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni ⇒ non ci sono pti stazionari ⇒ non ci sono né max né min. locali (C)

---

6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad \text{per } x \to +\infty \quad \frac{x}{x^2+1} \sim \frac{1}{x}$$

$$\left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right)$$

quindi l'integrale divergerà a $+\infty$.

Formalmente: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$ per $x \geq 0$

C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{x}$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

Ora $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{+\infty}^{0} \frac{-t}{t^2+1}(-dt) = -\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\,dt}$

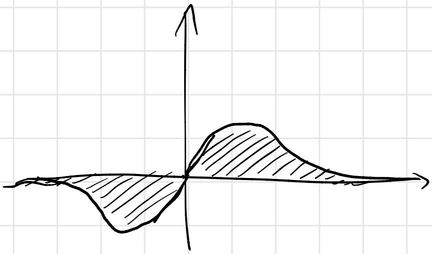
l'ho appena calcolato

$t=-x$

$dt=-dx$

"$x=-\infty \Rightarrow t=+\infty$"

$x=0 \Rightarrow t=0$



$= -\infty$

Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = +\infty - \infty$ cioè

non esiste.

(c)

In questo caso si poteva anche calcolare

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ usando una primitiva:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\log(M^2+1) - 0\right) = +\infty.$$

Attenzione a non fare cose del genere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\uparrow}{=} \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} = \dots = 0$$

SBAGLIATO

1) $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ $\quad f(x)=\sin(\arctan(x))$.

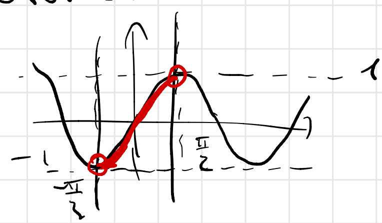
iniettiva e/o suriettiva?

$\arctan:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ è bigettiva

La domanda è se $\sin:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow(-1,1)$

sia iniettiva o suriettiva.

È entrambe le cose:



Quindi f è bigettiva.

Si poteva anche controllare che f è str. crescente calcolando la derivata, e che $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+1$

e usare fatti noti di teoria per concludere la bigettività.

$$f'(x) = \cos(\arctan(x)) \cdot \frac{1}{1+x^2} > 0$$

perché $\quad 1+x^2 > 0$

$\arctan(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \cos(\arctan(x)) > 0.$

---

8) $a_n = (5+\sin n)^n \qquad$ ha min/max?

$\lim_{n\to+\infty} a_n = ?$

$-1 \leq \sin(n) \leq 1$

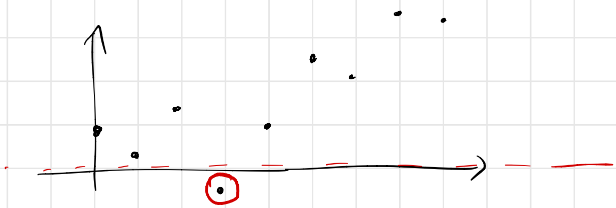
$\Rightarrow \quad 5+\sin(n) \geq 4$

$\Rightarrow \quad (5+\sin(n))^n \geq 4^n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Segue che la successione non ha massimo e ha minimo.

(a)



(si vede a occhio che il minimo è 1 per $n=0$)

9) $\displaystyle\sum_n \frac{1+(-1)^n}{5n+2} \qquad a_n = \frac{1+(-1)^n}{5n+2} = \begin{cases} \frac{2}{5n+2} & n \text{ pari} \\ \frac{0}{5n+2} = 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

posso ignorare gli indici dispari, e porre

$$n=2k \implies a_{2k} = \frac{2}{5(2k)+2} = \frac{2}{10k+2}$$

e la mia serie è $\sum_k \frac{2}{10k+2}$, che diverge

per C.A. con $b_k = \frac{1}{k}$.

(Altrimenti si poteva spezzare $\sum \frac{1+(-1)^n}{5n+2} =$

$$= \underbrace{\sum \frac{1}{5n+2}}_{\substack{\text{diverge} \\ (\text{C.A. con } \frac{1}{n})}} + \underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{5n+2}}_{\substack{\text{converge} \\ (\text{Leibnitz})}}$$

)