1 Esercizi

Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

1. A quale spazio vettoriale appartengono le colonne di A?
2. A quale spazio vettoriale appartiene A?
3. Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Per quali valori di n ha senso fare il prodotto Av?
4. Sia n come al punto precedente. A quale spazio vettoriale appartiene Av (con $v \in \mathbb{R}^n$)?
5. Le colonne di A sono linearmente indipendenti?
6. Trovare una base dello spazio delle colonne di A? Di quale spazio vettoriale è un sottospazio?
7. Il sistema lineare $Ax = 0$ ammette soluzioni? Trovare tutte le soluzioni del sistema $Ax = 0$.
8. Le soluzioni di $Ax = 0$ sono uno spazio vettoriale?
9. Sapreste trovarne una base?
10. Il vettore $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ appartiene allo spazio delle colonne di A?
11. Trovare tutte le soluzioni di $Ax = b$.
12. Questo insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale?
13. Trovare una combinazione lineare delle colonne di A che produca b.

2 Soluzioni

1. A $\mathbb{R}^3$ (o anche a $\mathbb{Q}^3$).
2. A $\mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ (o anche a $\mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q})$).
3. $n = 4$.
4. $\mathbb{R}^3$.
5. No, sono linearmente dipendenti. Potete ridurre a scala la matrice A e verificare che ci sono due colonne senza pivot. Oppure: quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente dipendenti!
6. Riducendo A a scala i pivot sono nella prima e terza colonna, quindi la prima e la terza colonna di A ne sono una base. Lo spazio delle colonne $\operatorname{Im} A$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
7. Sì, ammette soluzioni ($x = 0$ per esempio!). Per trovarle tutte, riduciamo a scala A ottenendo $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La seconda e quarta variabile sono libere, e le soluzioni sono tutti e soli i vettori della forma $\begin{bmatrix} -x_2 - 8x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$, con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ scelti arbitrariamente.
8. Sì, è quello che abbiamo chiamato $\operatorname{Ker} A$.
9. Possiamo riscrivere queste soluzioni come $x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per dimostrare che $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\operatorname{Ker} A$, basta verificare che questi due vettori sono linearmente indipendenti.

10. Ci stiamo chiedendo se b è combinazione lineare delle colonne di A, cioè se il sistema $Ax = b$ ha soluzione. L'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ porta a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. L'ultima equazione è soddisfatta automaticamente. Non è necessario continuare: arrivati a questo punto sappiamo che possiamo scegliere le variabili libere a piacere e che otterremo una soluzione. Quindi sì, b appartiene allo spazio delle colonne di A.

11. Ora dobbiamo continuare risolvendo equazione per equazione. Possiamo scegliere a piacere x_2 e x_4 e ricavare dalle altre equazioni $\begin{bmatrix} -x_2 - 8x_4 - 1 \\ x_2 \\ 4x_4 + 1 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

    Quindi l'insieme delle soluzioni è $\left\{ \begin{bmatrix} -x_2 - 8x_4 - 1 \\ x_2 \\ 4x_4 + 1 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

12. No. Per esempio, $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (che otteniamo scegliendo $x_2 = x_4 = 0$) è soluzione (difatti $Ax = b$), ma $2x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ non lo è (difatti $A(2x) = 2b$).

13. Basta prendere una soluzione del sistema lineare precedente. Per esempio, da $x_2 = x_4 = 0$ ricaviamo $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, quindi $b = v_3 - v_1$ (se chiamiamo v_1, v_2, v_3, v_4, nell'ordine, le colonne di A).