1 Esercizi

1. Se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti: vero o falso?

2. Se v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, allora v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti: vero o falso?

3. Sia $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Di quale spazio vettoriale è un sottospazio $\ker A$?

4. E $\operatorname{Im} A$?

5. Considera i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. A che spazio vettoriale appartengono?

6. Sono linearmente indipendenti?

7. Sapresti trovare esplicitamente una loro combinazione lineare che fa 0? Sapresti trovarle tutte?

8. Considera $\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0\}$ (con v_1, v_2, v_3 come definiti sopra). È uno spazio vettoriale? Sapresti scriverlo come span di un vettore? Come span di *due* vettori distinti? Trovarne una base?

9. Considera l'insieme di vettori $T_1 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z = x + y\}$. Si tratta di un sottospazio vettoriale? È il kernel di quale matrice?

10. Considera l'insieme di vettori $T_2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z = y + 1\}$. Si tratta di un sottospazio vettoriale?

11. Considera l'insieme di vettori $T_3 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z = xy\}$. Si tratta di un sottospazio vettoriale?

12. In quanti modi puoi prendere una stringa dalla prima colonna e uno dalla seconda e combinarle in modo che il risultato sia un'espressione sensata? (per esempio: "una base di uno spazio vettoriale" ha senso, "una base di un vettore" no).

Una base	di una matrice A
Un vettore	di un sottospazio
Lo spazio delle colonne	di uno spazio vettoriale
Un insieme di generatori	di un vettore

Quelli seguenti sono esercizi di carattere più teorico, e quindi anche un pochino più difficili.

13. Dimostrare direttamente (=senza appellarsi al teorema che dice che riducendo a scala la matrice formata dalle colonne una base corrisponde ai pivot) che $\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

14. Sia U due sottospazi vettoriali (su un campo $\mathbb{K}$) e $V, W \subseteq U$ due suoi sottospazi. $V \cap W$ (intersezione di V e W, elementi comuni a entrambi) è un sottospazio vettoriale?

15. $V \cup W$ (unione di V e W) è un sottospazio vettoriale?

16. L'insieme $\{av + bw : a, b \in \mathbb{K}, v \in V, w \in W\}$ è un sottospazio vettoriale?

17. L'insieme delle successioni $C = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ (per esempio, la successione dei numeri di Fibonacci $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ è un elemento di C) è uno spazio vettoriale?

18. Dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$, è possibile trovare n elementi di C linearmente indipendenti. In altre parole, C ha dimensione infinita.

19. Che dimensione ha il sottospazio di C fatto dalle soluzioni della ricorrenza lineare $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$, $k \geq 1$?

2 Soluzioni

1. Vero: se non esiste una terna x_1, x_2, x_3 tale che $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$, allora non esiste neppure una terna con $x_3 = 0$.

2. Falso: per esempio, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-12\\-18\end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti (perché?), ma $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

3. Di $\mathbb{R}^4$.

4. Di $\mathbb{R}^3$.

5. A $\mathbb{R}^3$ (o a $\mathbb{Q}^3$, $\mathbb{C}^3 \dots$).

6. Per saperlo, costruiamo la matrice che li ha come colonne e riduciamola a scala: vengono due pivot, quindi sono lineamente dipendenti.

7. Sì, basta trovare le soluzioni generiche del sistema lineare $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} x = 0$, che sono $S = \{\begin{bmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

8. È di nuovo S. Sì, è uno spazio vettoriale (è $\ker \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$). È anche $\operatorname{span}\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}$. Oppure volendo $\operatorname{span}\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\}$. $\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}$ (insieme formato da un vettore solo) è una sua base.

9. Sì (si possono verificare le proprietà).

10. No. Per esempio, non contiene lo zero.

11. No. Questa volta contiene lo zero, ma è semplice trovare esempi di vettori v_1, v_2 tali che $v_1, v_2 \in T_3$ ma $v_1 + v_2 \notin T_3$.

12. A me vengono le seguenti (ma magari dimentico qualcosa):
    - Una base di uno spazio vettoriale
    - Una base di un sottospazio
    - Lo spazio delle colonne di una matrice A
    - Un insieme di generatori di un sottospazio
    - Un insieme di generatori di uno spazio vettoriale
    - Un sottospazio di uno spazio vettoriale
    - Un sottospazio di un sottospazio
    - Un vettore di un sottospazio (non molto elegante, meglio "appartenente a" un sottospazio).

13. Una combinazione lineare generica dei due vettori è $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$ per $x, y \in \mathbb{R}$. Per dimostrare che i due vettori generano $\mathbb{R}^2$: per generare il vettore $\begin{bmatrix} b_1, b_2 \end{bmatrix}$ basta prendere $\begin{bmatrix} x = \frac{b_1+b_2}{2}, y = \frac{b_1-b_2}{2} \end{bmatrix}$. Per dimostrare che sono indipendenti, basta dire che l'unica soluzione di $x+y=0, x-y=0$ è $x=y=0$.

14. Sì: dobbiamo verificare le due proprietà: (1) se $v \in V \cap W$, allora è vero che $av \in V \cap W$ (per ogni $a \in \mathbb{K}$)? Sì: l'ipotesi significa che $v \in V$ e $v \in W$, ma allora $av \in V$ e $av \in W$, che vuol dire $av \in V \cap W$. (2) se $v_1, v_2 \in V \cap W$, allora $v_1, v_2 \in V$ e allora $v_1, v_2 \in W$, quindi...

15. No (in generale): l'abbiamo già visto in un esempio, l'unione di due rette non è un sottospazio vettoriale. In generale, se $v \in V$ e $w \in W$, nulla ci garantisce che $v + w$ appartenga a uno dei due spazi. Controesempio esplicito: $V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ non appartiene né a V né a W.

16. Sì: è lo span di (spazio vettoriale generato da) tutti i vettori di $V \cup W$. Potete anche verificare direttamente le due proprietà.

17. Sì: potete sommarle e moltiplicarle per un numero, e il risultato è un'altra sequenza infinita. Tutte le proprietà di queste operazioni sono verificate.

18. Chiamiamo $s^{(k)}$ la successione tale che
$$s_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
In altre parole, $s^{(1)} = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $s^{(2)} = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $s^{(3)} = (0, 0, 1, 0, \dots)$, e così via. Come è fatta una generica combinazione lineare degli $s^{(k)}$? L'unica possibilità perché sia nulla è che tutti i coefficienti siano 0.

19. Dimensione 2: difatti, come avete visto lo scorso semestre, le due successioni $a_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ e $b_k = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ lo generano e sono indipendenti. I numeri di Fibonacci sono una combinazione lineare di a_k e b_k (con quali coefficienti?).