CORREZIONE

3° compitino di MDAL

1 Aprile 2016

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere a matita. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} .$$

a) Si determini se $A\vec{x} = \vec{0}$ ha zero, una o infinite soluzioni $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ e si trovi una base dello spazio delle soluzioni.

b) Si determini inoltre se $A\vec{x} = \vec{b}$ ha sempre soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ o si trovi un controesempio.

Eliminazione di Gauss su A:

a) $A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2 \cdot I \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix}$

Ci sono due pivot e due variabili libere $\to$ il sistema ha infinite soluzioni.

X_2, X_4 variabili libere; $X_3 + X_4 = 0 \Rightarrow X_3 = -X_4$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \Rightarrow X_1 = -X_2 - X_3 - X_4 = -X_2 + X_4 - X_4 =$
$= -X_2$

Soluzioni:

$\ker A = \left\{ \begin{bmatrix} -X_2 \\ X_2 \\ -X_4 \\ X_4 \end{bmatrix} : X_2, X_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ X_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : X_2, X_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ è una base dello spazio delle soluzioni, $\ker A$.

Occhio - lo spazio delle soluzioni del sistema è Ker A, non Im A.

b) Se $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ è un generico vettore in $\mathbb{R}^3$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & b_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

Il sistema ha soluzione solo se $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.
È sufficiente scegliere un vettore con $b_3 \neq b_1 + b_2$, per esempio $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, per avere un controesempio.

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2.

a) Si trovino le coordinate del vettore $\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) Si trovino le coordinate del polinomio $p(x) = 2 + x$ rispetto alla base dello spazio dei polinomi di grado ≤ 1 costituita dai polinomi $q_1(x) = 3 + 2x$ e $q_2(x) = 2 + 3x$ (in quest'ordine).

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 \iff \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \end{array}\right] \; II - \tfrac{2}{3} I$$

$\frac{5}{3} x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{5}$

$3x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{2 - 2x_2}{3} = \frac{2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{3} = \frac{4}{5}$

Quindi le coordinate sono $\begin{bmatrix} 4/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$, difatti $\frac{4}{5}\vec{u}_1 - \frac{1}{5}\vec{u}_2 = \vec{c}$.

b) Usiamo la base $b_1(x) = 1$, $b_2(x) = x$ dello spazio dei polinomi di grado ≤ 1 per trasformare il problema in uno in $\mathbb{R}^2$:

$q_1(x) = 3b_1(x) + 2b_2(x)$, quindi le coordinate $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$q_2(x) = 2b_1(x) + 3b_2(x)$, coordinate $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$p(x) = 2b_1(x) + b_2(x)$, coordinate $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\to$

Quindi il sistema da risolvere è lo stesso del punto (a):

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le coordinate sono di nuovo $\begin{bmatrix} 4/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$.

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3. Vero o falso? Se V è uno spazio vettoriale e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ sono tali che valgano le seguenti tre condizioni

1. • $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$,
2. • $\vec{v}_2 \notin \operatorname{span}(\{\vec{v}_1\})$,
3. • $\vec{v}_3 \notin \operatorname{span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$,

allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Si trovi una dimostrazione o un controesempio.

Vero!

Supponiamo per assurdo che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ siano linearmente dipendenti, allora esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$ tali che

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = \vec{0},$$

e almeno uno tra x_1, x_2, x_3 è diverso da 0.

Dividiamo in tre casi:

1) $x_3 \neq 0$: allora,

$$\vec{v}_3 = -\frac{x_1}{x_3}\vec{v}_1 - \frac{x_2}{x_3}\vec{v}_2,$$ che è impossibile perché significherebbe che $\vec{v}_3 \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

2) $x_3 = 0$, ma $x_2 \neq 0$: allora

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \iff \vec{v}_2 = -\frac{x_1}{x_2}\vec{v}_1,$$ impossibile perché vorrebbe dire che $\vec{v}_2 \in \operatorname{span}(\vec{v}_1)$.

→

3) $x_3 = x_2 = 0$, ma $x_1 \neq 0$

$x_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$, che implicherebbe che $\vec{v}_1 = 0$,
(perché $x_1 \neq 0$).

impossibile.

Se almeno uno tra x_1, x_2, x_3 è diverso da 0 sono sempre in uno dei casi 1, 2, 3, quindi in ogni caso arrivo a un assurdo.

Commenti...

- Non è per forza $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, potrebbero anche avere un numero diverso di elementi.
- Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente indipendenti, allora 1), 2), 3) sono vere, ma non è quello che dovevate dimostrare (ma l'implicazione inversa).