
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

Compito 30/04/2024

Il punto con l'asterisco è opzionale

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1 \\ \alpha & \text{se } |i - j| = 1, i = 1, 2, \dots, n \\ 1 + \alpha^2 & \text{se } i = j, i = 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si dia una limitazione superiore ed inferiore agli autovalori di A .
2. Si applichi un passo di Gauss alla matrice A , si dimostri che, per ogni valore di α , la matrice è fattorizzabile LU e si determinando i due fattori triangolari. Quanto vale il determinante di A ? Per $\alpha = 1/2$ si usi il valore del determinante per dare una limitazione inferiore di λ_{min} , l'autovalore di modulo minimo di A .
3. Per $\alpha = 1/2$ si dia una limitazione superiore del numero di condizionamento di A in norma 2.
4. Si scriva una funzione Matlab `function y = prodotto(alfa, x)` che preso in ingresso α e un vettore x restituisce il prodotto $y = Ax$. La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $n \geq 2$, con la seguente struttura

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline \alpha I_n & I_n \end{array} \right],$$

con α parametro reale e I_n matrice identità di dimensione n .

1. Si dica per quali valori del parametro α la matrice è a predominanza diagonale.
2. * Si dica per quali valori del parametro α la matrice è fattorizzabile LU e nel caso se ne determinino i due fattori triangolari.
3. Si dica per quali valori del parametro α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente
4. Si dimostri che la matrice di iterazione del metodo di Jacobi è tale per cui $J^2 = \alpha^2 I_{2n}$. Sfruttando tale relazione si dica per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente.
5. Si scriva una funzione Matlab che implementa un passo del metodo di Gauss-Seidel. La funzione prende in ingresso il parametro α , il vettore b e l'iterazione x_{old} restituendo l'iterazione successiva x_{new} . La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.