Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
24/05/2024

Il punto con l'asterisco è opzionale

Esercizio 1. Sia $f(x) = 10x - e^x + e^{-x}$.

1. Si dimostri che $f(x) = -f(-x)$, e che l'equazione $f(x) = 0$ ammette tre soluzioni reali e se ne diano gli intervalli di separazione.
2. Si studi la convergenza del metodo delle tangenti (convergenza locale, convergenza in largo e ordine di convergenza) alla soluzione positiva di $f(x) = 0$.
3. * Si studi la convergenza locale del metodo $x_{i+1} = \Phi(x_i)$, per $\Phi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{10}$ ai punti fissi di $x = \Phi(x)$.
4. Si esprima l'errore algoritmico del calcolo di $f(x) = (10x - e^x) + e^{-x}$ come funzione degli errori locali nelle operazioni, supponendo che la funzione esponenziale sia realizzata da una funzione di libreria che introduce un errore in modulo maggiorato dalla precisione di macchina. In particolare si analizzi la stabilità numerica dell'algoritmo in prossimità delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice con la seguente struttura

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & 1 \\ & \alpha & 1 & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 + \alpha & \cdots & 1 + \alpha & \alpha \end{bmatrix},$$

dove gli elementi che non sono specificati vanno intesi sempre uguali a zero.

1. Si dica per quali valori del parametro α la matrice è fattorizzabile LU e si trovino i due fattori triangolari. Esistono valori di α per cui la matrice è singolare?
2. Per $\alpha = -1$ si consideri il metodo basato sulla decomposizione additiva dove M è la matrice triangolare superiore di A , cioè $M = \text{triu}(A)$ ed $N = M - A$. Si scriva la matrice di iterazione $P = M^{-1}N$ e si studi la convergenza del metodo iterativo ottenuto.
3. Si scriva una funzione Matlab `function x = metodo_iter_step(x0, b)` che implementa un passo del metodo precedente $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + M^{-1}b$, a partire da un vettore $x^{(0)}$ passato come parametro. La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.