

Correzione dello scult del 12/6/2024

Es 1.

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \quad x \neq \pm 2$$

$$2) \quad E_n = \frac{x}{f(x)} f'(x) E_x$$

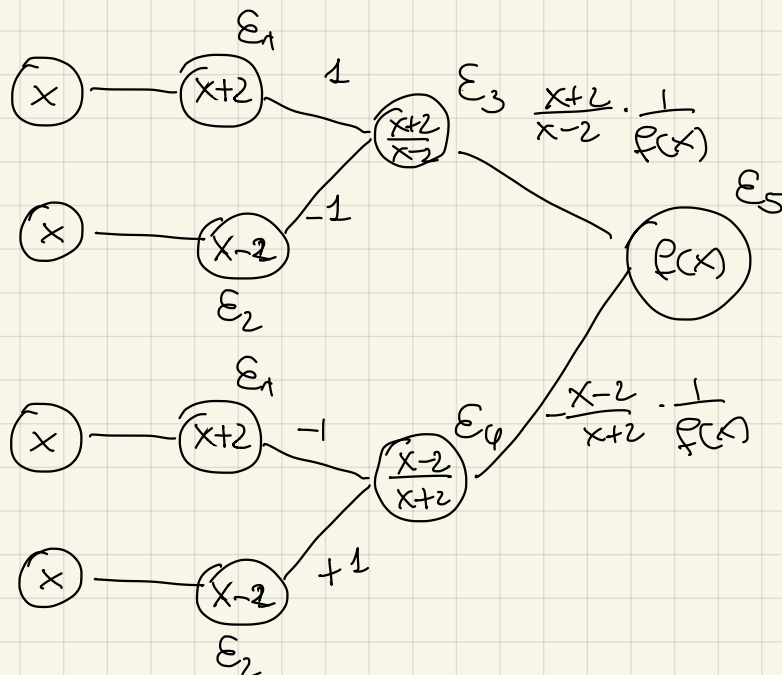
$$f(x) = \frac{x^2+4x+4 - (x^2-4x+4)}{(x^2-4)} = \frac{8x}{(x^2-4)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x^2-4) - 2x \cdot 8x}{(x^2-4)^2} = \frac{8x^2 - 32 - 16x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x^2 - 32}{(x^2-4)^2} = \frac{-8(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

$$E_n = \frac{\cancel{x}}{\cancel{8x}} \cdot \frac{\cancel{(x^2-4)} \cdot (-8 \cdot (x^2+4))}{(x^2-4)^2} E_x = - \frac{(x^2+4)}{x^2-4} E_x$$

$\Rightarrow |E_n| \leq \frac{x^2+4}{|x^2-4|}$ u Il problema risulta quindi malcond.
per $x \rightarrow \pm 2$, ben condizionato per $x \rightarrow \pm \infty$.

Stabilità:



$$E_{ALG} = E_5 + \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{1}{f(x)} (E_3 + E_1 - E_2) - \frac{(x-2)}{(x+2)f(x)} (E_4 - E_1 + E_2)$$

$$= E_5 + \frac{x+2}{x-2} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2-4}{8x} \right)}_{\frac{1}{f(x)}} E_3 - \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{8x} E_4 +$$

$$\frac{1}{f(x)} (E_1 - E_2) \left(\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} \right)$$

$$= E_5 + \frac{(x+2)^2}{8x} E_3 - \frac{(x-2)^2}{8x} E_4 + \frac{x^2-4}{8x} \left(\frac{x^2+4x+4 + x^2-4x+4}{x^2-4} \right) (E_1 - E_2)$$

$$= E_5 + \frac{(x+2)^2}{8x} E_3 - \frac{(x-2)^2}{8x} E_4 + \frac{\cancel{x^2-4}}{8x} \left(\frac{2x^2+8}{\cancel{x^2-4}} \right) (E_1 - E_2)$$

$$|E_{ALG}| \leq |E_5| + \frac{(x+2)^2}{8|x|} |E_3| + \frac{(x-2)^2}{8|x|} |E_4| + \frac{2(x^2+4)}{8|x|} (|E_1| + |E_2|)$$

$$\leq u + \frac{(x+2)^2 + (x-2)^2 + 4(x^2+4)}{8|x|} u$$

per $x \rightarrow 0$ abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 + (x-2)^2 + 4(x^2+4)}{8|x|} = +\infty$

quindi l'algoritmo non è stabile per $x \rightarrow 0$

per $x \rightarrow \pm\infty$ abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+2)^2 + (x-2)^2 + 4(x^2+4)}{8|x|} = +\infty$$

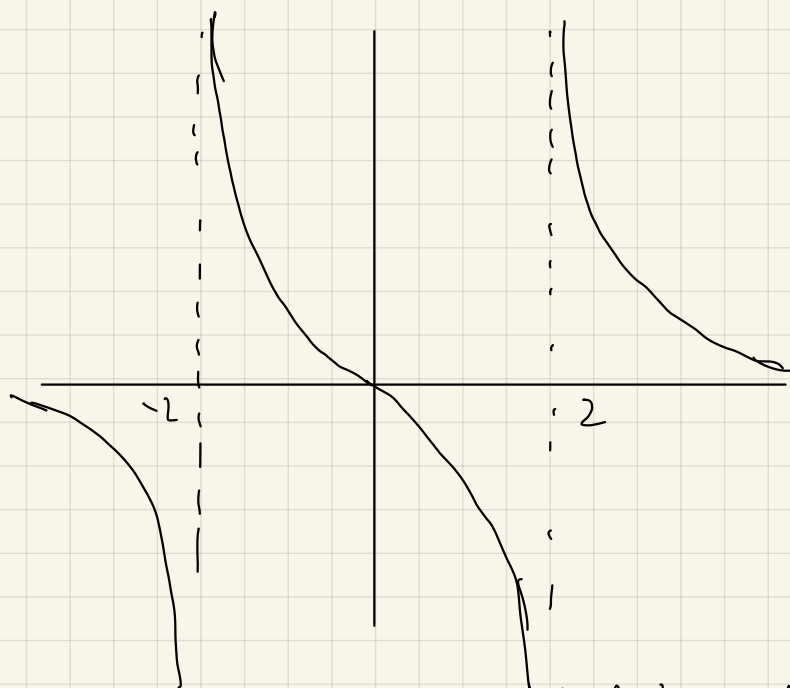
quindi l'algoritmo non è stabile neppure per $x \rightarrow \pm\infty$.

Risulta invece stabile per $x \neq \pm 2$

2) $f(x) = 0$

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8x}{(x^2-4)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

La funzione ha quindi una sola soluzione $x = 0$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

La funzione è sempre derivabile dove è continua.

$$f'(x) = \frac{-8(x^2+4)}{(x^2-4)^2} \quad \text{Sempre il segno}$$

Si nota $f'(x) < 0$ per ogni x quindi la f è sempre decrescente.

$$f''(x) = \frac{-16x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4) \cdot 2x \cdot 8(x^2+4)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-16x(x^2-4) + 32x(x^2+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{16x^3 + 192x}{(x^2-4)^3} = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ quindi f ha un flesso in zero.

Perché $f'(0) \neq 0$ la convergenza locale con ordine almeno 2. Poiché $f''(0) = 0$ allora l'ordine è superiore al secondo.

Per la convergenza in largo, ne a destra che a sinistra abbiamo che non soddisfa le condizioni.

Ovvero

$$\forall x \in (-2, 0) = S$$

$$\text{vale che } f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$$

$$f(x)f''(x) > 0 \quad \forall x \in S$$

$\Rightarrow$ ho una succ. monotona crescente, convergente a $\alpha \neq 0$, $\forall x_0 \in S$
Similmente se considero l'intervallo $S' = (0, 2)$, $\forall x_0 \in S'$
ho una successione monotona decrescente convergente a $\alpha \neq 0$

$$c) \quad x = \phi(x)$$

$$\text{con } \phi(x) = \frac{x^2 - 6x}{x+2} \quad x \neq -2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2}{x+2} \Leftrightarrow x+2 = \frac{(x-2)^2}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(x^2 - 4x + 4)}{(x+2)} - 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{x^2 - 4x + 4 - 2(x+2)}{x+2} \Leftrightarrow x = \frac{x^2 - 6x}{x+2}$$

$$\phi'(x) = \frac{(2x-6)(x+2) - x^2+6x}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 4x - 12 - x^2 + 6x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2} =$$

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 12 = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} -6 \\ 2 \end{cases}$$

$$\phi'(x) = \frac{(x+6)(x-2)}{(x+2)^2}$$

$$\phi'(0) = \frac{-12}{4} = -3 \quad \text{puisque } |\phi'(0)| > 1 \text{ non ho}$$

convergence locale.

4) Function `xvec = newton(x0, tol)`

$$f = @(x) (x+2)./(x-2) - (x-2)./(x+2);$$

$$f_1 = @(x) -8*(x.^2+4)./(x.^2-4).^2;$$

$$err = Inf;$$

$$u = 1; \quad xvec(1) = x0; \quad it = 0;$$

$$\text{while } err > tol \quad \& \quad it \leq 100,$$

$$xvec(i+1) = xvec(u) - f(xvec(u))./ f_1(xvec(u));$$

$$err = abs(xvec(u+1) - xvec(u));$$

$$u = u+1; \quad it = it+1;$$

end

Esercizio 2.

1)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & & & 1 \\ & -2 & k & \\ & & k-2 & \\ 1 & & & -2 \end{bmatrix}$$

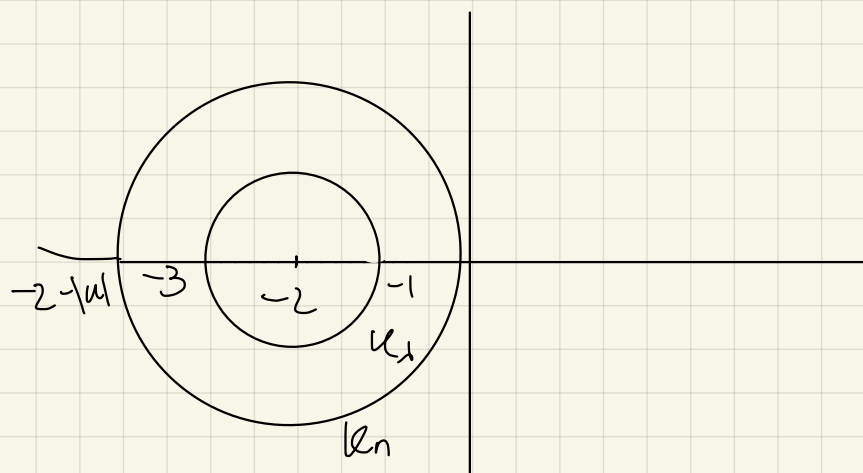
Poiché A è simmetrica i suoi autovalori sono reali. Possiamo valutarci con i cerchi di G. e trovare le condizioni su k affinché questi appartengano al semipiano negativo

disegniamo i cerchi di Gershgorin:

$$k_{2n} \leq k_n \rightarrow C_2 = -2; r_2 = 1$$

$$k_2 \leq \dots \leq k_{n-1} \quad C = -2 \quad e \quad r = 0$$

$$k_{n+1} \leq k_n \quad C_n = -2 \quad r = |k|$$



Otteniamo che se $|k| < 2 \rightarrow$ gli autovalori sono reali negativi.

$$2) \quad J = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & \ddots & \\ & & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -k & \\ & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & +\frac{1}{2} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{k}{2} & \\ +\frac{1}{2} & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^2 = \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{2} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{k}{2} & \\ \frac{1}{2} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{2} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{k}{2} & \\ \frac{1}{2} & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & & 0 \\ & \frac{k^2}{4} & & 0 \\ & & \frac{k^2}{4} & 0 \\ 0 & & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Si nota che J^2 è diagonale e quindi
 ha come autovalori $\frac{1}{4}$, $\frac{k^2}{4}$ con mult. 2 e
 0 con molteplicità $2n-4$.

Poiché se λ è autovalore di $J \Rightarrow \lambda^2$ è autovalore
 di J^2 almeno le più autovalori di J in
 modulo sono uguali al modulo delle radici
 degli autovalori di J^2 .

$$\text{quindi } \rho(J) = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{|k|}{2} \right\}.$$

Il metodo è quindi convergente $\Leftrightarrow |k| < 2$.

In questo caso la condizione è la stessa che
 si trova con la condizione sufficiente sulla
 pred. diagonale di A .

3*) Il metodo di Gauss può essere sempre applicato ad A poiché non c'è l'annullamento di alcun pivò.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & & & 1 \\ & -2 & k & \\ & & k-2 & \\ 1 & & & -2 \end{bmatrix}$$

Sono necessari solo 2 passi

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & -2 & k \\ & & & k-2 & \ddots \\ 0 & & & & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_n \leftarrow R_n + \frac{1}{2} R_1$$

$$1 \dots -2$$

$$-1 \dots \frac{1}{2}$$

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} -2 & & & 1 \\ & -2 & k & \\ & & 0 & \frac{k^2-2}{2} & -2 & \ddots \\ & & & \frac{k^2-2}{2} & -2 & \ddots \\ & & & & & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_{n+1} \leftarrow R_{n+1} + \frac{k}{2} R_n$$

de è triangolare superiore

$$\Rightarrow \det A = \det A^{(n)} = (-2)^n \cdot (-2 + \frac{k^2}{2}) (-2)^{n-2} \cdot (-\frac{5}{2})$$

$$= (-2)^{2n-2} \left(\frac{5}{2} \left(\frac{k^2}{2} - 2 \right) \right) = (-2)^{2n-4} 5 (k^2 - 4) \Rightarrow$$

quindi $k = \pm 2$ la A è singolare

4. Function $y = \text{mat_pool}(u, b)$

$n2 = \text{length}(b);$

$y = \text{zeros}(n2, 1);$

$n = n2/2;$ % si assume n pari

$y(1) = -2 * b(1) + b(n2);$

for $i = 2 : n2$

$y(i) = -2 * b(i);$

end

$y(n) = y(n) + u * y(n+1);$

$y(n+1) = y(n+1) + u * y(n);$

end.