4/11/2024 Straordinario

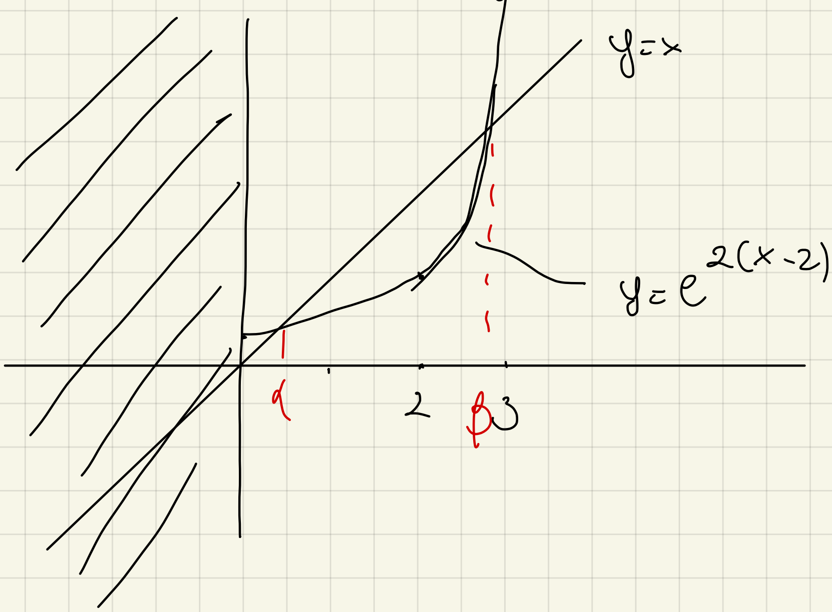
Es 1.

$$f(x) = \sqrt{x} - g(x) \qquad \text{con} \quad g(x) = e^{x-2} \quad x \geq 0$$

a) $f(x) = 0 \iff \sqrt{x} = g(x) \underset{x>0}{\iff} x = g^2(x)$

$\iff x = e^{2(x-2)}$

Discutiamo in modo grafico



Ci sono 2 soluzioni: $0 < \alpha < 1$, $2 < \beta < 3$

infatti $f(0) = -e^{-2} < 0 \qquad f(1) = 1 - e^{-1} > 0$

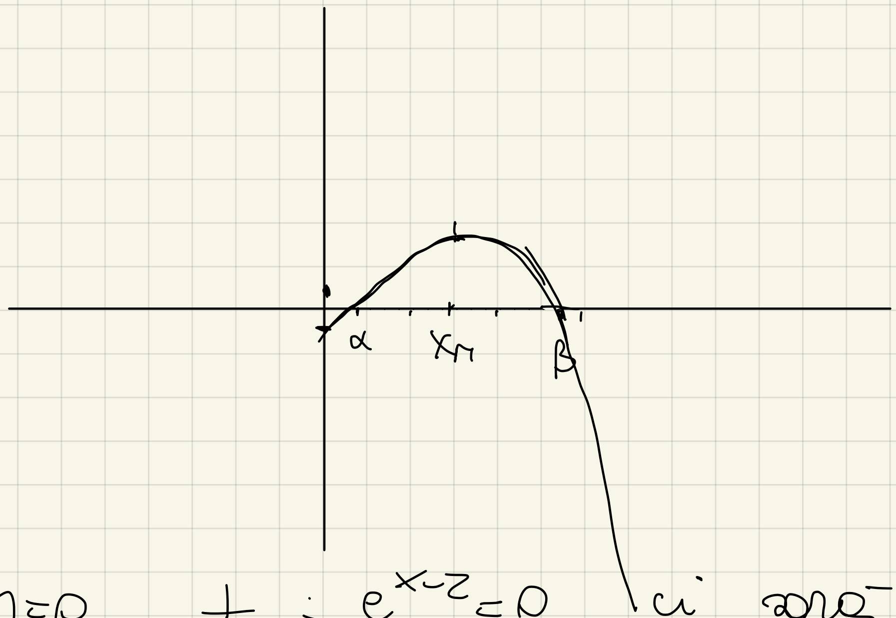
e similmente $f(2) = 2 - 1 = 1 \qquad f(3) = \sqrt{3} - e < 0$

b) Metodo delle tangenti

f è derivabile su $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{x-2} = 0 \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - e^{x-2} = 0$$

si nota che $f''(x) < 0 \quad \forall x$



$f'(x) = 0 \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{x-2} = 0$ ci sarà un punto

$\alpha < x_M < \beta$ per cui quale $f'(x_M) = 0$

Poiché $f''(x) < 0$ $f'(x)$ è decrescente e questo punto sarà l'unico punto stazionario

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Poiché $f'(\alpha) \neq 0$ e $f'(\beta) \neq 0$ il MdT converge localmente ad entrambe le soluzioni con ordine almeno 2.

Per la convergenza in largo si osserva che $S = (0, \alpha)$ sono soddisfatte le condizioni del teorema infatti $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$

$f(x) f''(x) > 0 \quad \forall x \in S$

quindi $\forall x_0 \in S \Rightarrow \{x_i\} \to \alpha$ con in modo monotono cres-

simulmente consideriamo $R = (\beta, +\infty) \Rightarrow \forall x_0 \in R$
la succ. $\{x_i\} \to \beta$ in modo monotono decrescente.

Si può estendere la convergenza a β a partire da $x_0 \in (x_M, \beta)$. Infatti $x_1 \in R$.

Per quanto riguarda $x_0 \in (\alpha, x_M)$, occorre essere sicuri che $x_1 \in S$, se partiamo troppo vicini a x_M infatti potrebbe succedere che $x_1 < 0$ e quindi la funzione non è più definita

c) $x_{i+1} = e^{2(x_i - 2)}$

$\phi(x) = e^{2(x-2)}$ Abbiamo visto che è equivalente a $f(x) = 0$

$\phi'(x) = 2e^{2(x-2)} = 2\phi(x)$

Da questa relazione vediamo subito che poiché $\beta > 1$

$$\phi'(\beta) = 2\phi(\beta) = 2\beta > 2$$ quindi non abbiamo

convergenza locale a β.

Per quanto riguarda la conv. ad α, abbiamo convergenza se $2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$

poiché $f(0) < 0$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - e^{-3/2} \approx 0.48 > 0$

quindi abbiamo convergenza poiché $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

In particolare volendo studiare la convergenza locale si cerca un intervallo $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ per il quale $|\phi'(x)|<1$ $\qquad \phi'(x)=2e^{2(x-2)}<1$

$$e^{2(x-2)}<\frac{1}{2} \iff 2(x-2)<\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff 2x-4<-\log_e 2 \iff 2x<4-\log_e 2$$

$$x<2-\frac{1}{2}\log_e 2 \approx 1.65\ldots$$

quindi $\forall \rho \leq \alpha \Rightarrow \forall x \in (0, 2\alpha)$.

(d*) Condizionamento – errore inerente

$$c_x = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-e^{x-2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{x-2}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{x}^{\,1/2}}{\sqrt{x}-e^{x-2}} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{x}e^{x-2}}{2\cancel{\sqrt{x}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2xe^{x-2}}{2\sqrt{x}-2e^{x-2}}$$

si nota

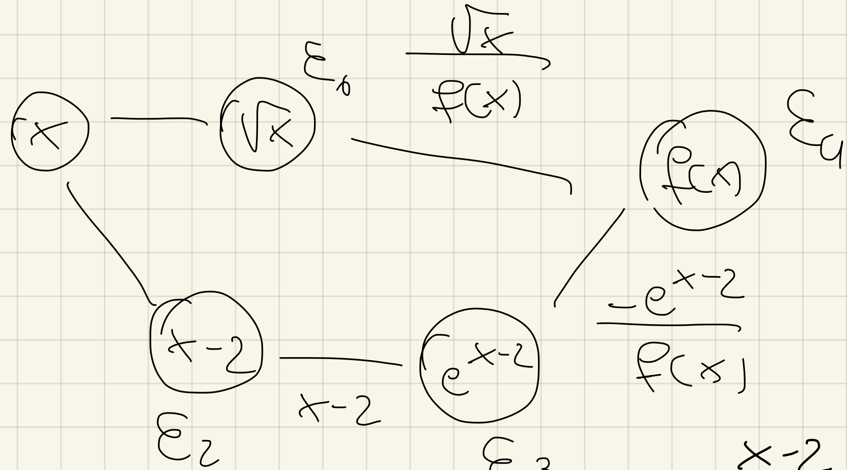
$$\lim_{x\to\alpha,\beta}|c_x| = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}|c_x| = \infty$$

$\Rightarrow$ il calcolo della funzione risulta malcondizionato per $x\to\alpha,\beta$ e all'infinito

Risulta invece ben condizionato per $x\to 0$

Errore algoritmico:



$$\varepsilon_{alg} = \varepsilon_4 + \frac{\sqrt{x}}{f(x)}\varepsilon_1 - \frac{e^{x-2}}{f(x)}\left(\varepsilon_3 + (x-2)\varepsilon_2\right)$$

$$|\varepsilon_{alg}| \leq u\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{|f(x)|} + \frac{e^{x-2}}{|f(x)|}\left(1 + |x-2|\right)\right)$$

Quindi l'alg. è instabile per $x \to \alpha, \beta$

Inoltre ho instabilità anche per $x \to +\infty$

perché $\lim_{x \to \infty} \frac{|x-2|\, e^{x-2}}{|f(x)|} = \infty$

Es 2:

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & & & -\alpha \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ \alpha & & & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$A = I - M = \begin{bmatrix} 1-\alpha & & & \alpha \\ -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \alpha \\ -\alpha & & & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

a) LU:

per $\alpha \neq 1$ sono soddisfatte le condizioni per l'esistenza e l'unicità della fatt LU

$$A = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right]$$

$$L_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha} & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha} & 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad U_{n-1} \begin{bmatrix} 1-\alpha & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T U_{n-1} = (-\alpha \ 0 \dots 0)$$

$$\left((1-\alpha)x_1 \quad x_2 \dots x_{n-1}\right) = (-\alpha \quad 0 \dots 0)$$

$$x_1 = \frac{-\alpha}{1-\alpha} \qquad x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$$

$$L_{n-1}\, y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha} y_1 + y_2 = \alpha \\ \vdots \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha} y_1 + y_{n-1} = \alpha \end{cases}$$

$$y_1 = \alpha$$

$$y_2 = \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha - \alpha^2 + \alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha^2+\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \vdots \\ \frac{\alpha}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$x^T y + \beta = 1 + \alpha$$

$$x^T y = -\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \beta = 1 + \alpha \qquad \beta = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{1-\cancel{\alpha^2}+\cancel{\alpha^2}}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}$$

quindi se $\alpha \neq 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha} & \ddots & & \\ \vdots & & 1 & \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha} & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & & & \alpha \\ & 1 & 0 & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ & & & \vdots \\ 0 & & 1 & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ & & & \frac{1}{1-\alpha} \end{bmatrix}$$

Per $\alpha = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ -1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 1 \\ -1 & & & 2 \end{bmatrix}$$

se la fattorizzazione esiste $\to$

$$L^{-1} A = U \qquad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ -1 & 1 & & | \\ | & & \ddots & 1 \\ -1 & & 1 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} \cdot & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = [* \; 1 \; 0 \text{——} 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

quindi per $\alpha = 1$ la fatt LU non esiste.

b) Convergenza dei metodi iterativi

(i) condizioni sufficienti

$$\|M\|<1 \quad \text{se} \quad |\alpha|<\frac{1}{2} \Rightarrow \|M\|_\infty<1$$

e il metodo converge.

Condizioni necessarie e sufficienti

$\rho(M)<1$?

$$\det(M-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} \alpha-\lambda & & & & -\alpha \\ \alpha & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & -\lambda & -\alpha \\ \alpha & & & & -\alpha-\lambda \end{bmatrix}=$$

$$=(\alpha-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\lambda & \\ & & & -\alpha-\lambda \end{pmatrix}+(-1)^{n+1}(-\alpha)\det\begin{pmatrix} \alpha & -\lambda & & \\ \alpha & & \ddots & \\ \vdots & & & -\lambda \\ \alpha & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha-\lambda)(-\alpha-\lambda)(-\lambda)^{n-2}+(-1)^{n+1}(-\alpha)\cdot(-1)^n\alpha\cdot(-\lambda)^{n-2}=$$

$$=(-\lambda)^{n-2}\left(\lambda^2-\alpha^2\right)+\alpha^2(-\lambda)^{n-2}=(-\lambda)^{n-2}\left(\lambda^2\cancel{-\alpha^2}\cancel{+\alpha^2}\right)=0$$

$\lambda=0$

M ha tutti gli autovalori uguali a 0

Infatti M è una matrice di rango 1 per cui ha almeno n-1 autovalori nulli. L'ultimo autov. può essere individuato con la traccia. perché $tr(M$

abbiamo che tutti gli autovalori sono nulli -

c) $$x^{(k+1)} = M x^{(k)} + b$$

$$M = u v^T \Rightarrow$$

$$M x^{(k)} = u \underbrace{v^T x^{(k)}}_{} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left(\alpha x_0^{(k)} \cancel{+} \alpha x_n^{(k)} \right)$$

$$= \left(\alpha x_0^{(k)} - \alpha x_n^{(k)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$