

---

Cognome

Nome

Matricola

Firma

---

Corso di Laurea in Informatica  
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO - Corso A  
16/12/2024

---

Il punto con l'asterisco è opzionale

---

*Esercizio 1.* È data la funzione

$$f(x) = x^2 - 8 \log(x), \quad x > 0.$$

- (a) Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione  $f(x) = 0$  e se ne forniscano gli intervalli di separazione.
- (b) Si studi la convergenza (locale, in largo e ordine di convergenza) del metodo delle tangenti alle soluzioni di  $f(x) = 0$ .
- (c) Si studi la convergenza del metodo iterativo  $x_{i+1} = e^{x_i^2/8}$  (convergenza locale, ordine di convergenza).
- (d\*) Per  $x > 0$  si studi il condizionamento del calcolo di  $f(x)$  e la stabilità dell'algoritmo individuato dalla formula precedente. Si supponga che la funzione logaritmo sia una funzione di libreria che introduce un errore in valore assoluto maggiorato dalla precisione di macchina.

*Esercizio 2.* Sia  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j, i = 1, \dots, n \\ 1 & \text{se } j = i - 1, i = 2, \dots, n \\ 1 & \text{se } i = 1, j = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ad esempio per  $n = 4$  abbiamo

$$A_4 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

- (a) Si dica per quali valori del parametro  $\alpha$  i metodo di Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili.
- (b) Si dica per quali valori del parametro  $\alpha$  il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente.
- (c) Si dica per quali valori del parametro  $\alpha$  il metodo di Jacobi risulta convergente.
- (d) Si scriva una funzione Matlab che dato in input  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, tol, \alpha \in \mathbb{R}$  implementa il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con vettore iniziale nullo arrestandosi quando  $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty \leq tol$  o  $k > 1000$  iterazioni. La funzione deve restituire  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  e  $k$ , non richiedere la memorizzazione della matrice e avere costo al più lineare per iterazione.