Correzione del primo compitino

$m=0$	$k=9$
$m=1$	$k=8$
$m=2$	$k=7$
$m=3$	$k=6$
$m=4$	$k=5$
$m=5$	$k=5$
$m=6$	$k=6$
$m=7$	$k=7$
$m=8$	$k=8$
$m=9$	$k=9$

Esercizio 1:

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + x - \frac{1}{k}$$

a) Numero di soluzioni reali:

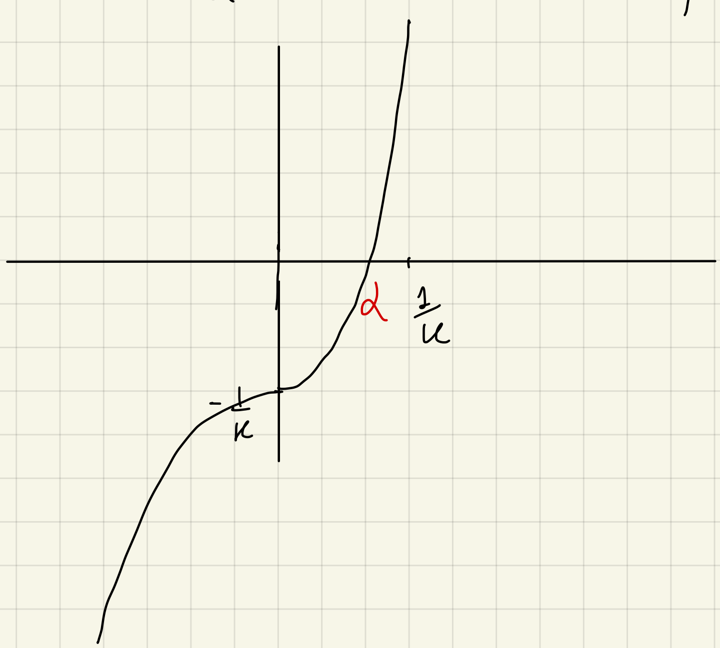
$k > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 1 > 0 \quad \forall x$ quindi f è monotona crescente

$f''(x) = \frac{6}{k}x \qquad f''(x) > 0$ per $x > 0$ e $f''(x) < 0$ per $x < 0$

Poiché $f(0) = -\frac{1}{k} \qquad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^4} > 0$

La funzione ha una sola radice α, $0 < \alpha < \frac{1}{k}$



(b) Poiché la funzione è di classe $C^2(-\infty,+\infty)$ e α è radice semplice (cioè $f'(\alpha)\neq 0$) abbiamo assicurata la convergenza locale del M.d.T. L'ordine è quadratico poiché $f''(\alpha)\neq 0$

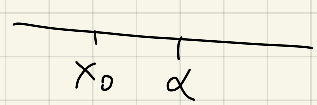
Possiamo poi vedere che per $S=(\alpha,+\infty)$ sono soddisfatte le condizioni di convergenza in largo infatti:

$$f'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in S$$
$$f(x)\,f''(x)>0 \quad \forall\, x\in S$$

questo mi assicura la convergenza monotona di tutte le successioni generate con il M.d.T. a partire da $x_0\in(\alpha,+\infty)$.

Noto inoltre che per $x_0\in(0,\alpha)$, abbiamo che $x_1\in S$ e quindi ho convergenza anche a partire da questi punti:

$$x_1=\phi(x_0)=x_0-\underset{<0}{\boxed{\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}}>x_0$$



Inoltre $x_1-\alpha>0$ infatti

$$x_1-\alpha=\phi(x_0)-\phi(\alpha)=\phi'(\xi)\underset{<0}{(x_0-\alpha)}$$

$|\xi-\alpha|<|x_0-\alpha|$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$\Rightarrow$ poiché $|\xi - \alpha| < |x_0 - \alpha| \Rightarrow f(\xi)f''(\xi) < 0$

$$\Rightarrow x_n - \alpha = \underbrace{\frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2}}_{\wedge\, 0} \underbrace{(x_n - \alpha)}_{\wedge\, 0} > 0$$

(c) $\phi(x) = -\frac{1}{k}(x^3 - 1)$

Il metodo di punto fisso applicato a $x = \phi(x)$ è equivalente a $f(x) = 0$ infatti

$$x = -\frac{1}{k}(x^3 - 1) \iff \frac{1}{k}x^2 + x - \frac{1}{k} = 0$$

Per studiare la convergenza locale utilizziamo il corollario del teorema del punto fisso.

$$\phi'(x) = -\frac{3}{k}x^2 .$$

$\phi''(x) = -\frac{6}{k}x$ quindi sull'intervallo $[0, \frac{1}{k}]$ che è di separazione per α, $\phi'(x)$ è decrescente

$\Rightarrow -\frac{3}{k}\cdot\frac{1}{k^2} < \phi'(\alpha) < 0$ $\qquad -\frac{3}{k^3} > -1 \iff k^3 > 3$

sempre vero.

Quindi poiché $|\phi'(\alpha)| < 1$ abbiamo convergenza locale.

Per avere un intervallo di convergenza, notiamo che

$$|\phi'(x)| = \left| \frac{3}{k} x^2 \right| < 1 \quad \text{per} \quad -\sqrt{\frac{k}{3}} < x < \sqrt{\frac{k}{3}}$$

da cui abbiamo che $I_\alpha = \left[2\alpha - \sqrt{\frac{k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}}\right]$ è

un intervallo chiuso e circolare di α per cui scelto $x_0 \in I_\alpha$, abbiamo successioni convergent.

L'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 2.

$$f(x) = \frac{x^k + 1}{x^{2k} - 1} = \frac{1}{x^k - 1}$$

a) $\varepsilon_{in} \doteq \frac{x}{f(x)} f'(x) \varepsilon_x$ $\qquad (x^k - 1)^{-1}$

$$\varepsilon_{in} = -x\,\cancel{(x^k - 1)} \cdot \frac{k x^{k-1}}{(x^k - 1)^{\cancel{2}}} \varepsilon_x = \frac{-k x^k}{x^k - 1} \varepsilon_x$$

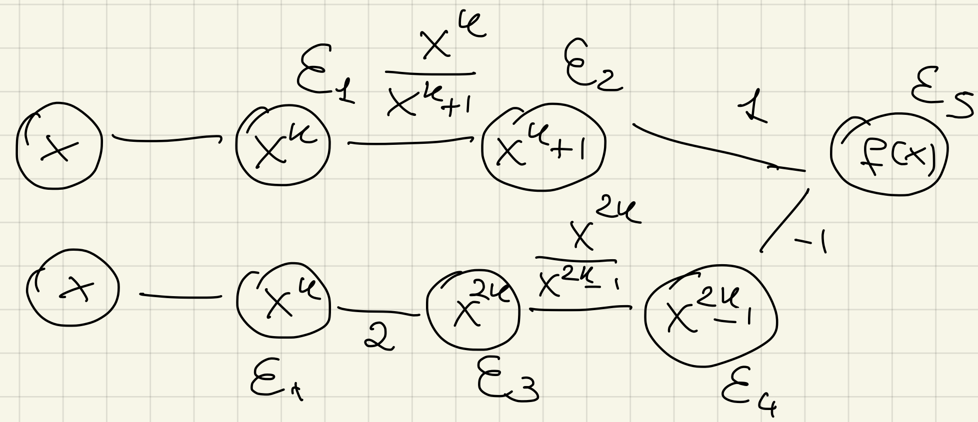
da cui abbiamo che il problema risulta mal condizionato per $x^k - 1 \to 0$

Questo succede per $x \to +1$ se k è dispari

per $x \to \pm 1$ se k è pari

b) Nella traccia si suppone di avere una funzione di libreria che permette di calcolare x^k. Un possibile algoritmo per il calcolo di $f(x)$ è descritto dal seguente grafo.

Alg 1:



$$\varepsilon_{ALG}^{(1)} = \varepsilon_5 + 1\left(\varepsilon_2 + \frac{x^k}{x^{k+1}}\varepsilon_1\right) - 1\left(\varepsilon_4 + \frac{x^{2k}}{x^{2k}-1}\left(\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1\right)\right)$$

$$= \varepsilon_5 + \varepsilon_2 + \frac{x^k}{x^{k+1}}\varepsilon_1 - \varepsilon_4 - \frac{x^{2k}}{x^{2k}-1}\varepsilon_3 - 2\frac{x^{2k}}{x^{2k}-1}\varepsilon_1$$

$$= \varepsilon_5 + \varepsilon_2 + \frac{x^k(x^k-1) - 2x^{2k}}{x^{2k}-1}\varepsilon_1 - \varepsilon_4 - \frac{x^{2k}}{x^{2k}-1}\varepsilon_3$$

$$= \varepsilon_5 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 + \frac{-x^k}{x^k-1}\varepsilon_1 - \frac{x^{2k}}{x^{2k}-1}\varepsilon_3$$

$$\left|\varepsilon_{ALG}^{(1)}\right| \leq u\left(3 + \frac{|x^k|}{|x^k-1|} + \frac{|x^{2k}|}{|x^{2k}-1|}\right)$$

quindi abbiamo instabilità per $x^k - 1 \to 0$ e per $x^{2k} - 1 \to 0$ cioè sia per k pari che dispari instabilità per $x \to \pm 1$.

Si noti che x^{2k} poteva essere calcolato anche come kpow(x^2). L'errore è diverso ma anche questo algoritmo risulta instabile per $x \to \pm 1$.

Algoritmo 2.

$$f(x) = \frac{1}{x^k - 1}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] x \arrow[r] & \underset{\varepsilon_1}{x^k} \arrow[r, "\frac{x^k}{x^k-1}"] & \underset{\varepsilon_2}{x^k-1} \arrow[r, "-1"] & \underset{\eta_3}{f(x)} \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_{ALG}^{(2)} = \eta_3 - \left(\varepsilon_2 + \frac{x^k}{x^k-1} \varepsilon_1 \right)$$

$$|\varepsilon_{ALG}^{(2)}| = \left| \eta_3 - \varepsilon_2 - \frac{x^k}{x^k-1} \varepsilon_1 \right| \leq 2u + u \left(\frac{|x^k|}{|x^k-1|} \right)$$

quindi questo algoritmo è instabile per

$x \to \pm 1$ per k pari

$x \to 1$ per k dispari

Quindi per k dispari è preferire questo algoritmo. (se $x \to -1$) per k pari sono instabili entrambi per $x \to \pm 1$ ma questo secondo algoritmo è in generale preferibile perché effettua meno operazioni.

(c) $\bar{x} = 1 + 10^{-4}$ è un numero di macchina poiché lavorano con 6 cifre.

Poiché $\bar{x}^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 10^{-4j} = 1 + k\,10^{-4} + \frac{k(k-1)}{2} 10^{-8} + \dots$

poiché $10 \leq \frac{k(k-1)}{2} \leq 36 \Rightarrow 10^{-7} \leq \frac{k(k-1)}{2} \cdot 10^{-8} \leq 3.6 \cdot 10^{-7}$, abbiamo che $fl(\bar{x}^k) = 1 + k\,10^{-4}$ $\qquad \varepsilon_1 = \dfrac{fl(\bar{x}^k) - \bar{x}^k}{\bar{x}^k}$

$$fl(fl(\bar{x}^k) - 1) = k \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_2 = 0$$

e $fl\left(\dfrac{1}{fl(fl(\bar{x}^k) - 1)}\right) = 10^4 \cdot fl\left(\dfrac{1}{k}\right)$

A seconda dei valori di k si ottengono i differenti valori:

$k = 5$	$fl\left(\frac{1}{5}\right) = 0.2$	$f(\bar{x}) \approx 0.2 \cdot 10^4$
$k = 6$	$fl\left(\frac{1}{6}\right) = 0.16666666$	$f(\bar{x}) \approx 0.126666\ 10^4$
$k = 7$	$fl\left(\frac{1}{7}\right) = 0.14285714$	$f(\bar{x}) \approx 0.142857\ 10^4$
$k = 8$	$fl\left(\frac{1}{8}\right) = 0.125$	$f(\bar{x}) \approx 0.125\ 10^4$
$k = 9$	$fl\left(\frac{1}{9}\right) = 0.11111111$	$f(\bar{x}) \approx 0.111111\ 10^4$