Correzione della seconda prova intermedia

Es 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & & \\ & \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha \\ & & & \alpha & 1+\alpha^2 \end{bmatrix}$$

a) Gli autovalori di A sono reali in quanto $A = A^T$. Applichiamo il teorema di Gershgorin

K_1 ha centro 1 e raggio $|\alpha|$

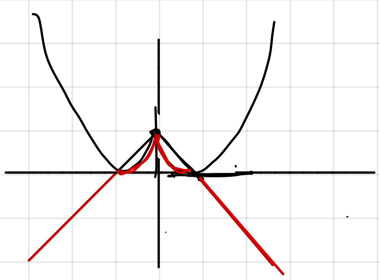
$K_2 = \dots = K_{n-1}$ ha centro $1+\alpha^2$ e raggio $2|\alpha|$

K_n ha centro $1+\alpha^2$ e raggio $|\alpha|$

Si noti che $K_n \subset K_2$, mentre

$1+\alpha^2+2|\alpha| = (1+|\alpha|)^2 \geq 1+|\alpha|$ da cui abbiamo che $\lambda_i \leq (1+|\alpha|)^2$

In particolare $\min\{1-|\alpha|, (1-|\alpha|)^2\} < \lambda_i \leq (1+|\alpha|)^2$.



Si osservi che per

$|\alpha| \geq 1 \Rightarrow \min\{1-|\alpha|, (1-|\alpha|)^2\} = 1-|\alpha|$

per $|\alpha| < 1 \Rightarrow \min\{1-|\alpha|, (1-|\alpha|)^2\} = (1-|\alpha|)^2$

b) Applicando un passo di Gauss ad $A_n = A$ di dimensione n

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & \\ 0 & 1 & \alpha & & \\ & \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha \\ & & & \alpha & 1+\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix} \qquad m_{21} = \alpha$$

Possiamo notare che la matrice da ridurre è della stessa forma della matrice iniziale. Possiamo quindi applicare un ragionamento induttivo che ci porta ad affermare che

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \alpha & \\ & & & & A_{n-k} \end{bmatrix}$$

e $$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ & & & 1 \end{bmatrix} = U$$ mentre $$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

$\det A = \det L \cdot \det U = 1$

Poiché $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = 1 \Rightarrow$

$$\lambda_{min} = \lambda_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i}$$

Se $|\alpha| < 1 \Rightarrow (1-|\alpha|)^2 \leq \lambda_i \leq (1+|\alpha|)^2$ cioè gli autovalori sono tutti reali positivi da cui $\lambda_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i} \geq \frac{1}{(1+|\alpha|)^{2(n-1)}}$

per $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_n \geq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

c) $\mu_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$

$\|A\|_2 = \rho(A)$ poiché A è simmetrica

$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_{min}|} \leq (1+|\alpha|)^{2(n-1)}$

per $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \rho(A^{-1}) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2(n-1)}$ $\quad \rho(A) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \mu_2(A) = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \leq (1+|\alpha|)^2 \cdot (1+|\alpha|)^{2(n-1)} = (1+|\alpha|)^{2n}.$

Nel caso in cui non si fosse arrivati a dimostrare che

$$\lambda_{min} \geq \frac{1}{(1+|\alpha|)^{2(n-1)}}$$

oppure potevo sfruttare il fatto che $\lambda_i > (1-|\alpha|)^2$

da cui

$$\mu_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \leq \frac{(1+|\alpha|)^2}{(1-|\alpha|)^2}$$

d) $y = Ax$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & & \\ & \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha \\ & & & \alpha & 1+\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{matrix} x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha x_1 + (1+\alpha^2) x_2 + \alpha x_3 \\ \alpha x_2 + (1+\alpha^2) x_3 + \alpha x_4 \\ \vdots \\ \alpha x_{n-1} + (1+\alpha^2) x_n \end{matrix}$$

```
Function    y = prodotto (alfa, x)
  n=length (x)
  y= zeros (n,1)
  y(1)= x(1) + alfa * x(2);
  beta= 1+ alfa * alfa
  for k=2:n-1
      y(k)= alfa * x(k-1) + beta * x(k) + alfa * x(k+1);
  end
  y (n)= alfa * x(n-1) + beta * x(n);
end
```

Esercizio 2:

$$A = \begin{bmatrix} I_n & \alpha I_n \\ \alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) A è a predominanza diagonale se $1 > |\alpha|$

b) I primi n passi di Gauss possono sempre essere applicati e si arriva a

$$U = \left[\begin{array}{c|c} I & \alpha I \\ \hline 0 & (1-\alpha^2) I \end{array}\right]$$ che è in forma triangolare superiore

quindi $$L = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \alpha I & I \end{array}\right]$$

c) La matrice di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha I \\ 0 & \alpha^2 I \end{bmatrix}$$ infatti

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \alpha I & I \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ e $MG = N$

$\rho(G) = \alpha^2$ da cui abbiamo convergenza se e solo se $|\alpha| < 1$.

d) $$J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha I \\ -\alpha I & 0 \end{bmatrix}$$

si osserva che $$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha I \\ -\alpha I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha I \\ -\alpha I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 I & 0 \\ 0 & \alpha^2 I \end{bmatrix} = \alpha^2 I_{2n}$$

questo implica che gli autovalori di J^2 sono α^2 da cui segue $|\lambda_J| = |\alpha|$

e pertanto $\rho(J) = |\alpha|$ - Il metodo di Jacobi

è quindi convergente se e solo se $|\alpha| < 1$.

e)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{2n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right] \qquad i = 1, 2, \dots 2n$$

$a_{ii} = 1$, $a_{ij} = \alpha$ per $i = j+n$ $\quad j = 1 \dots n$

$a_{ij} = \alpha$ per $j = i+n$ $\quad i = 1 \dots n$

$$\Rightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \left[b(i) - \alpha\, x_{i+n}^{(k)} \right] \qquad i = 1 \dots n$$

$$x_{i+n}^{(k+1)} = \left[b(i+n) - \alpha \cdot x_i^{(k+1)} \right]$$

```
Function  xnew = gs_step (alfa, b, xold)

n2= length (b)
if rem(n,2) ~=0
        error('la dimensione deve essere pari');
end
n= n2/2;    xnew= zeros (n2, 1);
for i= 1: n
      xnew(i)= b(i)- alfa * xold(i+n);
      xnew(i+n)= b(i+n)- alfa * xnew(i);
end;
```