Es 1: $f(x) = 10x - e^{x} + e^{-x}$

1. $f(x) = -f(-x)$

$$f(-x) = -10x - e^{-x} + e^{x} = -(10x + e^{-x} - e^{x}) = -f(-x)$$

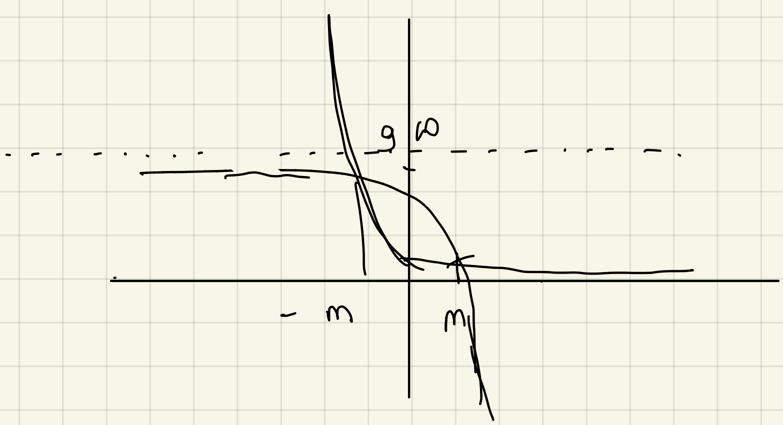
Da questo fatto si deduce che 0 è soluzione poiché $f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

se α è tale per cui $f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(-\alpha) = -f(\alpha) = 0$

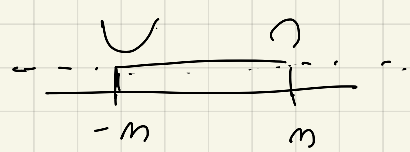
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{10x - e^{x}}_{-\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{10x + e^{-x}}_{+\infty} - \underbrace{e^{x}}_{\to 0} = +\infty$$

$f'(x) = 10 - e^{x} - e^{-x} \geq 0$ $\qquad e^{-x} \leq 10 - e^{x}$



$f'(x) \overset{?}{=} f'(-x)$



$f''(x) = -e^{x} + e^{-x} = 0$ $\qquad e^{x} = e^{-x}$ per $x = 0$ ho un cambio di concavità

$$\begin{matrix} f(3) \geq 0 \\ f(4) < 0 \end{matrix} \Rightarrow \quad 3 \leq \alpha \leq 4$$

Ci sono quindi 3 soluzioni $\Rightarrow 3 \leq \alpha \leq 4$, $-\alpha$ e 0.

b) Poiché le tre radici hanno molteplicità 1 (infatti $f'(0) \neq 0$, $f'(\alpha) = f'(-\alpha) \neq 0$), le radici sono semplici e quindi il metodo delle tangenti risulta convergente localmente, con ordine almeno 2.

Dallo studio fatto vediamo che se scegliamo

$S = (\alpha, +\infty)$ sono soddisfatte le condizioni del teorema di convergenza in largo

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$

$f(x) f''(x) > 0 \quad \forall x \in S.$

$\Rightarrow$ se scegliamo $x_0 \in S \Rightarrow$ convergenza monotona decrescente.

Similmente per $Q = (-\infty, -\alpha)$, su tale intervallo

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in Q$

$f(x) f''(x) > 0 \quad \forall x \in Q$

$\Rightarrow$ scegliendo $x_0 \in Q$ ho conv. monotona crescente a $-\alpha$.

Possiamo vedere che possiamo estendere

l'intervallo di conv. ad α. Infatti:
$\forall x_0 \in (m, \alpha) \Rightarrow x_1 \in S$ e quindi convergo
$\forall x_0 \in (-\alpha, -m) \Rightarrow x_1 \in Q$ e quindi convergo

Per quanto riguarda la radice 0 vedo che non sono mai soddisfatte le condizioni del teorema di convergenza in largo, però sappiamo che c'è convergenza locale di ordine almeno 2.
Per individuare l'intervallo di convergenza devo procedere con il teorema del punto fisso con

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad \text{e}$$

$$\phi''(x) = \frac{[f'(x)]^{\cancel{2}}\left(f'(x) f''(x) + f(x) f'''(x)\right) - 2\cancel{f'(x)} f''(x) f(x) f''(x)}{[f'(x)]^{\cancel{4}\,3}}$$

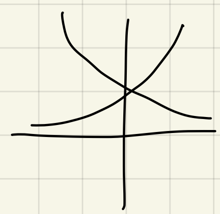
$$= \frac{[f'(x)]^2 f''(x) + f(x) f'(x) f'''(x) - 2 f(x) [f''(x)]^2}{[f'(x)]^3}$$

Poiché $\phi''(0) = 0 \Rightarrow 0$ è un punto stazionario di ϕ' questo significa che l'ordine sarà di ordine almeno 3.

3. $\phi(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{10}$, $x = \phi(x) \iff f(x) = 0$

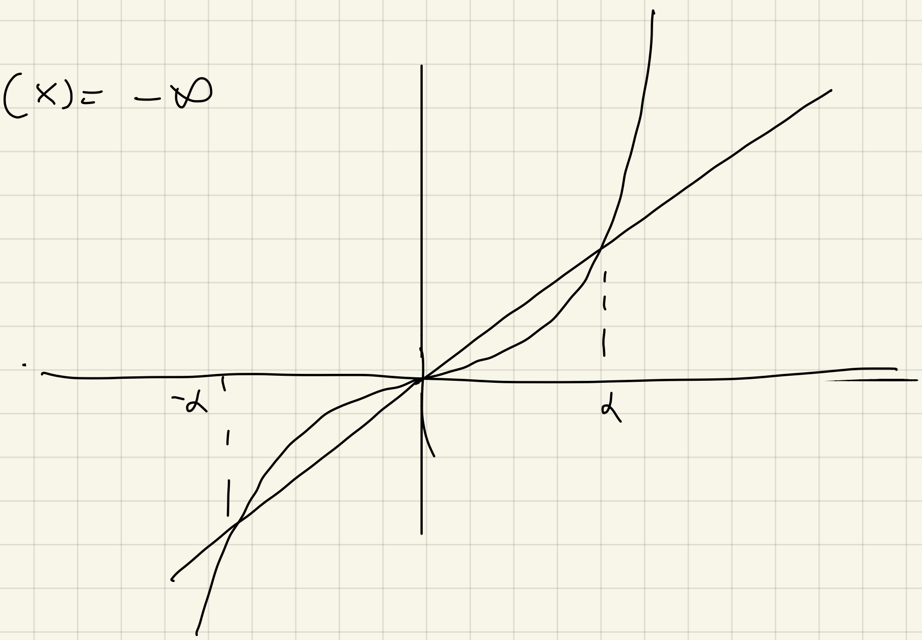
$\phi'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{10} > 0 \quad \forall x$ quindi $\phi(x)$ è una funzione crescente

$\phi''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{10} = \phi(x) = 0 \iff e^x = e^{-x}$ cioè per $x=0$



$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = -\infty$



$\phi'(x)$ è una funzione crescente per $x>0$ e decrescente per $x<0$

$2 \le \phi'(3) \le \phi'(\alpha)$ non ho convergenza.

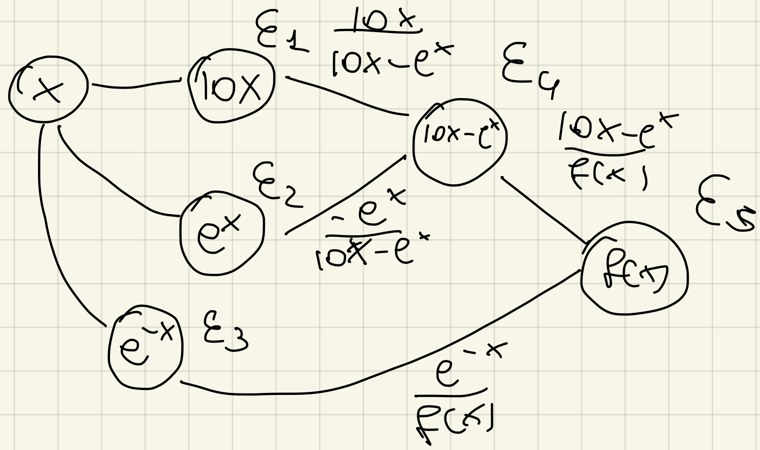
Similmente $\phi'(-\alpha) \geq \phi'(-3) > 2$

quindi non ho convergenza neppure a $-\alpha$

$\phi'(0) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} < 1$ quindi ho convergenza locale a zero di ordine 1.

④ Errore algoritmico.

$$f(x) = 10x - e^{x} + e^{-x}$$



$$\varepsilon_{ALG} = \varepsilon_5 + \frac{10x - e^{x}}{f(x)} \left(\varepsilon_4 + \frac{10x}{10x - e^{x}} \varepsilon_1 - \frac{e^{x}}{10x - e^{x}} \varepsilon_2 \right) + \frac{e^{-x}}{f(x)} \varepsilon_3$$

$$= \varepsilon_5 + \frac{(10x - e^{x})}{f(x)} \varepsilon_4 + \frac{10x}{f(x)} \varepsilon_1 - \frac{e^{x}}{f(x)} \varepsilon_2 + \frac{e^{-x}}{f(x)} \varepsilon_3$$

si osserva che

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{10x}{f(x)} \right| = \infty \qquad \lim_{x \to 0} \left| \frac{10x - e^{x}}{f(x)} \right| = +\infty$$

$$|\varepsilon_{ALG}| \leq u \left(1 + \frac{|10x - e^{x}|}{|f(x)|} + \frac{|10x|}{|f(x)|} + \frac{|e^{x}|}{|f(x)|} + \frac{|e^{-x}|}{|f(x)|} \right)$$

questi termini divergono per $x \to 0$, $x \to \alpha$, $x \to -\infty$

Es2:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha & 1 \\ \alpha & 1+\alpha & \cdots & 1+\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

1. Se $\alpha \neq 0$ i minori principali di testa sono non singolari e quindi $\exists!$ la fatt. LU

$$A = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}}_{A_{n-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L_{n-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}}_{U_{n-1}}$$

$$x^T U_{n-1} = [\alpha \;\; \alpha+1 \;\; \dots \;\; \alpha+1]$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha+1 \\ \vdots \\ \alpha+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \alpha x_2 + x_1 = \alpha + 1 \Rightarrow \quad x_2 = 1 \\ \vdots \\ x_n = 1 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{n-1} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^T y + \beta = \alpha \Rightarrow \quad x^T y = n-1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha - (n-1)$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha-(n-1) \end{bmatrix}$$

per $\alpha = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = LU$$

$$L^{-1} A = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & * \\ 0 & & \\ u_{n2} & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$u_{n2} = L^{-1}(n,:)\, A(:,2) = 1 \neq 0$$

Quindi se $\alpha = 0$ la matrice A non è fattorizzabile

Se $\alpha = 0$ A è singolare perché la prima colonna è tutta nulla e quindi $rk(A) < n$.

Per $\alpha = 0$ dalla fatt. LU si vede che

$$\det A = \alpha^{n-1}(\alpha - (n-1)) \quad \text{da cui}$$

A è singolare per $\alpha = n-1$.

2. Per $\alpha = -1$ la matrice diventa

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & & \\ & & 0 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$P = M^{-1}N$ poiché N è tutta zero tranne l'elemento $N_{n,1}$

$$MP = N \Rightarrow \qquad P = [p_1 | p_2 \cdots | p_n] : \qquad p_2, p_3 \cdots, p_n = 0$$

$$M p_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ \vdots \\ p_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} p_n^{(1)} = -1 \\ -p_{n-1} + p_n = 0 \qquad p_{n-1} = p_n \end{array}$$

$$-p_{n-2} + p_{n-1} + p_n = 0 \qquad p_{n-2} = -2$$

$$-p_{n-3} + p_{n-2} + p_n = 0 \qquad p_{n-3} = p_{n-2} + p_n \Rightarrow p_{n-3} = -3$$

$$-p_{n-4} + p_{n-3} + p_n = 0 \qquad p_{n-4} = p_{n-3} + p_n = -4$$

$\vdots$

$$p_{n-k} = -k \qquad p_n = -1 \qquad \text{per } k \geq 1$$

$$P = \begin{bmatrix} -(n-1) & & \\ \vdots & & \\ -2 & 0 & \\ -1 & & \\ -1 & & \end{bmatrix}$$

P è triangolare inferiore

$$\Rightarrow \lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{con molt. } n-1 \\ -(n-1) \end{cases}$$

Il metodo non è quindi convergente.

3) Ci sono due modi di implementare un passo di questo metodo. Il primo è di scriverlo in base alle componenti di A

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$i = n, n-1, \dots 1$

oppure alterando la matrice P e il vettore $q = M^{-1} b$

$$M q = b \qquad Mq = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$-q_n = b_n \qquad \boxed{q_n = -b_n}$$

$$-q_{n-1} + q_n = b_{n-1} \Rightarrow \boxed{q_{n-1} = -b_n - b_{n-1}}$$

$$-q_{n-2} + q_{n-1} + q_n = b_{n-2} \qquad q_{n-2} = -b_{n-2} - q_{n-1} - q_n$$

$$\vdots$$

$$-q_{n-k} + q_{n-k+1} + q_n = b_{n-k} \Rightarrow \boxed{q_{n-k} = q_{n-k+1} + q_n - b_{n-k}}$$

poi
$$P = \begin{bmatrix} -(n-1) & & \\ -(n-2) & & \\ \vdots & & 0 \\ -1 & & \\ -1 & & \end{bmatrix}$$

$$
x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -(n-1) & & \\ \vdots & & 0 \\ -[n-(n-2)] & & \\ -(n-(n-1)) & & \\ -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = -(n-i)\, x_1^{(k)} + q_i \qquad i = 1, \dots n-1
$$

$$
x_n^{(k+1)} = -x_1^{(k)} + q_n
$$

```
function   x = metodo_iter_step( x0, b)
 n= lenght(b);
% calcolo q.
 q=zeros(n,1);
 q(n)= -b(n);
 q(n-1)= q(n)- b(n-1);
 for k= 2:-1: n-1
     q(n-k) = q(n-k+1) + q(n)- b(n-k);
 end
xnew= zeros(n,1);
for i= 1: n-1
     xnew(i)= -(n-i) * x0(1) + q(i);
end
    xnew(n)= -x0(1) + q(n);
end.
```

Il passo iterativo su A direttamente diviene invece

$$x^{(k+1)}(n) = -\left(b(n) + \quad x^{(k)}(1)\right)$$

$$x^{(k+1)}(i) = -\left(b(i) - x^{(k+1)}(i+1) - x^{(k+1)}(n)\right) \qquad i = n-1, \dots 1$$