

Correzione del compito del 12/9/2024

Es 1.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f(x) = 0.$$

Si osserva che $f(1) = 1 + 3 - 4 = 0$ quindi $\alpha = 1$ è soluzione. Per trovare le altre soluzioni possiamo scomporre $f(x) = (x-1)h(x)$

$$h(x) = f(x)/(x-1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 4 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 + 4x + 4 \\ \hline 4x^2 - 4 & \\ 4x^2 - 4x & \\ \hline 4x - 4 & \end{array}$$

" $h(x) = (x+2)^2$

quindi $f(x) = (x-1)(x+2)^2 = 0$ ha 2 radici:
 $\alpha = 1$, $\beta = -2$. La radice β ha
multiplicità 2

L'equazione $x = g(x)$ è definita per

$x \neq \frac{2}{3}$. che non è soluzione di $f(x) = 0$

$$x = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 2} \Leftrightarrow (3x - 2)x = x^2 - 4x + 4$$

$$3x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

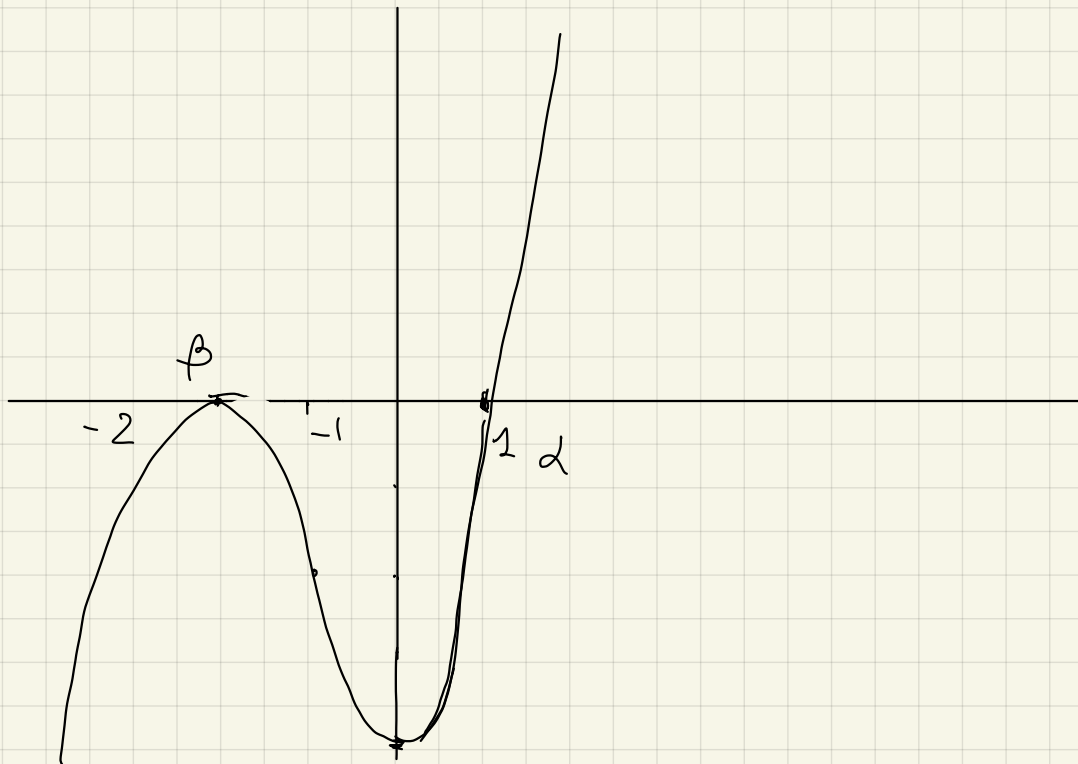
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0$$

Quindi le soluzioni di $x = g(x)$ sono ancora α e β , entrambe con molteplicità 1.

Per disegnare il grafico di $f(x)$, calcoliamo

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \quad 3x(x + 2) = 0 \quad x = 0 \quad x = -2$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \quad x = -1$$



Per il grafico di $g(x)$ risulta,

$$g'(x) = \frac{(2x-4)(3x-2) - 3(x^2-4x+4)}{(3x-2)^2} =$$
$$= \frac{6x^2 - 12x - 4x + 8 - 3x^2 + 12x - 12}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2 - 4x - 4}{(3x-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Delta = 4 + 12 = 16$$

Δ

$$x = \frac{2 \pm 4}{3} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$g(2) = \frac{4 - 8 + 4}{12 - 2} = 0$$

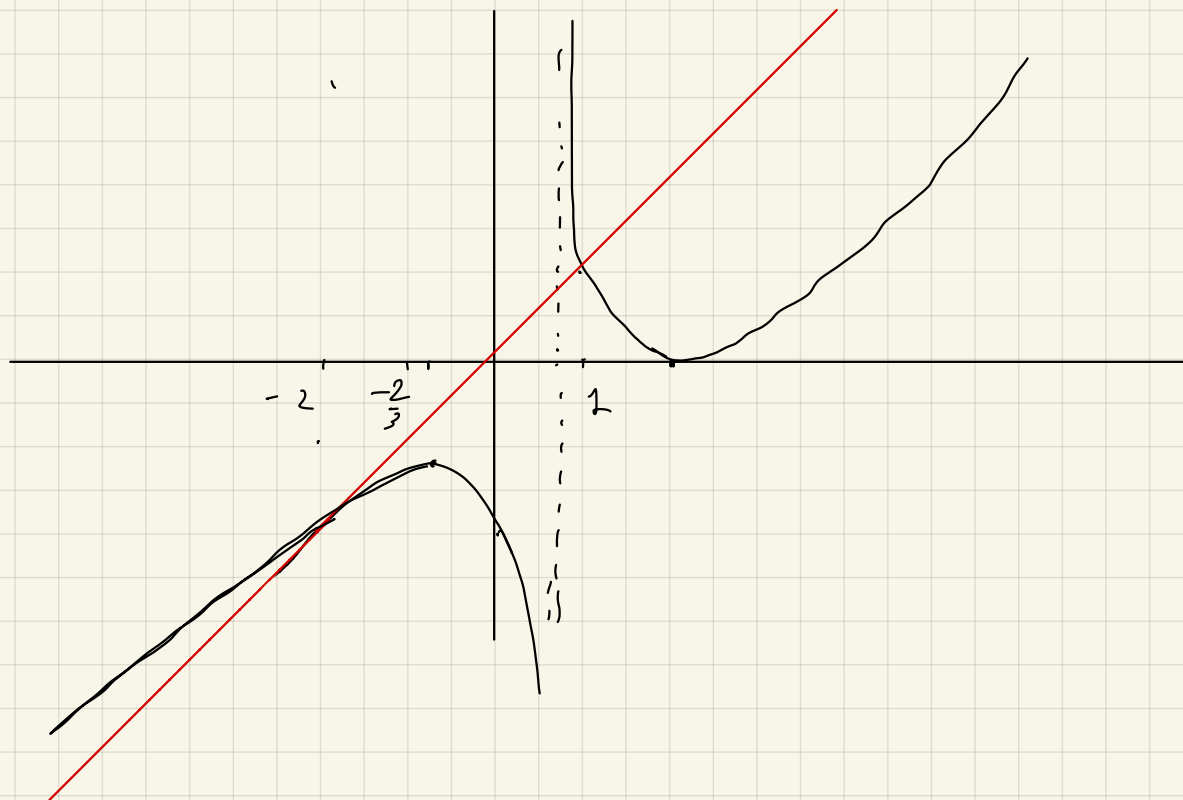
$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{4}{9} + \frac{8}{3} + 4}{-2 - 2} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1 - 6 - 9}{9} = -\frac{16}{9}$$

$$g''(x) = \frac{(6x-4)(3x-2)^2 - 2(3x-2) \cdot 3(3x^2-4x-4)}{(3x-2)^4} =$$

$$= \frac{(18x^2 - 12x - 12x + 8) - 6(3x^2 - 4x - 4)}{(3x-2)^3} = \frac{32}{(3x-2)^3}$$

Il grafico di $g(x)$ risulta quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} g(x) = +\infty$$



b) $\alpha = 1$ è radice semplice quindi abbiamo convergenza locale e l'ordine è almeno 2.

Per la radice $\beta = -2$ non possiamo applicare il teorema in quanto la $f'(-2) = 0$.

Abbiamo comunque convergenza di ordine 1, infatti per il teorema di convergenza in lungo posso scegliere $x_0 \in (-\infty, -2)$ e su tale intervallo $f'(x) \neq 0$, $f(x), f''(x) > 0$, ottenendo quindi una succ. monotona convergente a β .
 per $x_0 \in (-2, -1)$ abbiamo ancora convergenza a β .

Abbiamo convergenza ad $\alpha \forall x_0 \in (1, +\infty)$ per il teorema su tale intervallo $f'(x) \neq 0$ e $f(x), f''(x) > 0$.

Possono estendere l'intervallo di convergenza anche per $x_0 \in (0, 1)$. Per tali punti abbiamo $x_1 \in (1, +\infty)$ e quindi convergono ad x .

$$c) \quad g'(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{(3x - 2)^2}$$

$$g'(1) = \frac{3 - 4 - 4}{1} = -5 \quad \text{quindi non ho convergenza locale.}$$

$$g'(-2) = \frac{12 + 8 - 4}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} < 1 \quad \text{quindi ho convergenza locale a } -2.$$

$$|g'(x)| < 1 \quad |3x^2 - 4x - 4| < (3x - 2)^2$$

$$|(x + \frac{2}{3})(x - 2)| < (3x - 2)^2$$

Abbiamo già visto che non abbiamo convergenza per $x < -\frac{2}{3}$, allora

$$3x^2 - 4x - 4 < 9x^2 + 4 - 12x$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 8x + 8 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 4 > 0 \quad \forall x$$

quindi abbiamo convergenza per ogni

$x_0 \in (-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3})$. Questo è un intervallo

circolare di $\beta = -2$ con $\rho = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. $\left(\begin{array}{l} \beta - \rho = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3} \\ \beta + \rho = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \end{array} \right)$

dal grafico si osserva che in realtà abbiamo
una sec. convergente $\forall x_0 \in (-\infty, \frac{2}{3})$. Infatti per
 $x_0 \in (-\infty, -\frac{2}{3})$ ho conv. monotona, mentre se $x_0 \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
 $x_1 < \beta$,

d) Quindi il Malt converge sempre mentre non ha
convergenza con il metodo di punto fisso alle
radici $\alpha=1$. Per la radice β , abbiamo che
sia il metodo di punto fisso che il metodo
della tangente hanno ordine 1. L'intervallo
di convergenza a β è più ampio per il metodo
di punto fisso

ES 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

si osserva che $A_5 - \kappa I$ con $\kappa = 2, 3, 4$ ha una colonna nella quale $\det(A_5 - \kappa I) = 0$ per cui $\kappa = 2, 3, 4$ sono autovalori.

Analizziamo il polinomio caratteristico allora

$$\det(A_5 - \lambda I) = (5 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & & & \\ 1 & 2-\lambda & & \\ 1 & & 3-\lambda & \\ 1 & & & 4-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (5 - \lambda)(4 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & & \\ 3-\lambda & & \\ 4-\lambda & & \end{pmatrix} =$$

$$= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) \left[(5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \right] = 0$$

" $\det$ di $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

Il caso $n = 5$ può essere generalizzato ad n qualsiasi, applicando la regola di Laplace per il calcolo del polinomio caratteristico.

in altre

$$p_n(\lambda) = (n-\lambda)(n-1-\lambda) \cdots (1-\lambda) + (-1)^{n+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 2-\lambda & & & 2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n-2 & \\ & & & (n-1)-\lambda & (n-1) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n (i-\lambda) + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \sum_{i=2}^{n-1} (i-\lambda) =$$

$$= \sum_{i=2}^n (i-\lambda) \left[(n-\lambda)(1-\lambda) - 1 \right] \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & n-\lambda \end{pmatrix}$$

b) Poiché i numeri principali di teste di ordine k con $k=1, \dots, n-1$ sono triangolari inferiori:

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & k \end{pmatrix} = k! \neq 0$$

e invertibili, sono soddisfatte le condizioni del teorema di esistenza ed unicità.

I valori L e U possono essere determinati risolvendo i 4 sistemi, o applicando il passo di Gauss

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ 2 & & & 2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n-1 & n-2 \\ & & & n-1 \end{pmatrix}$$

c) Il metodo di G-S è applicabile poiché $a_{ii} \neq 0$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & n \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \vdots \\ -(n-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = M^{-1}N \Rightarrow MG = N$$

$$M \cdot g = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \vdots \\ -(n-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = -1$$

$$g_1 = -1$$

$$g_1 + 2g_2 = -2$$

$$g_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$g_1 + (n-1)g_{n-1} = -(n-1)$$

$$g_1 + n \cdot g_n = 0$$

$$g_m = -\frac{n+2}{n-1}$$

$$g_n = \frac{1}{n}$$

quindi

$$G = \begin{pmatrix} 0 & - & - & 0 & -1 \\ \vdots & & & \vdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & - & - & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$\rho(G) = \frac{1}{n}$ e quindi il metodo è convergente poiché $\rho(G) < 1$

d) Per il metodo di Gauss-Seidel abbiamo:

$$x_i^{(new)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(new)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(old)} \right]$$

$a_{ii} = i$, Nel caso in considerazione otteno

$$x_1^{(new)} = b_1 - x_n^{(old)}$$

$$x_i^{(new)} = \frac{1}{i} [b_i - x_1^{(new)} - i \cdot x_n^{(old)}] \quad i=2, \dots, n-1$$

$$x_n^{(new)} = \frac{1}{n} [b_n - x_1^{(new)}]$$

Function $x_{new} = gs_step(x_{old}, b)$

$n = \text{length}(b)$

$x_{new} = \text{zeros}(n, 1)$

$x_{new}(1) = b(1) - x_{old}(n);$

$x_{new}(n) = (b(n) - x_{new}(1))/n;$

for $i=2:n-1$

$x_{new}(i) = (b(i) - x_{new}(1) - i * x_{old}(n))/i;$

end

end