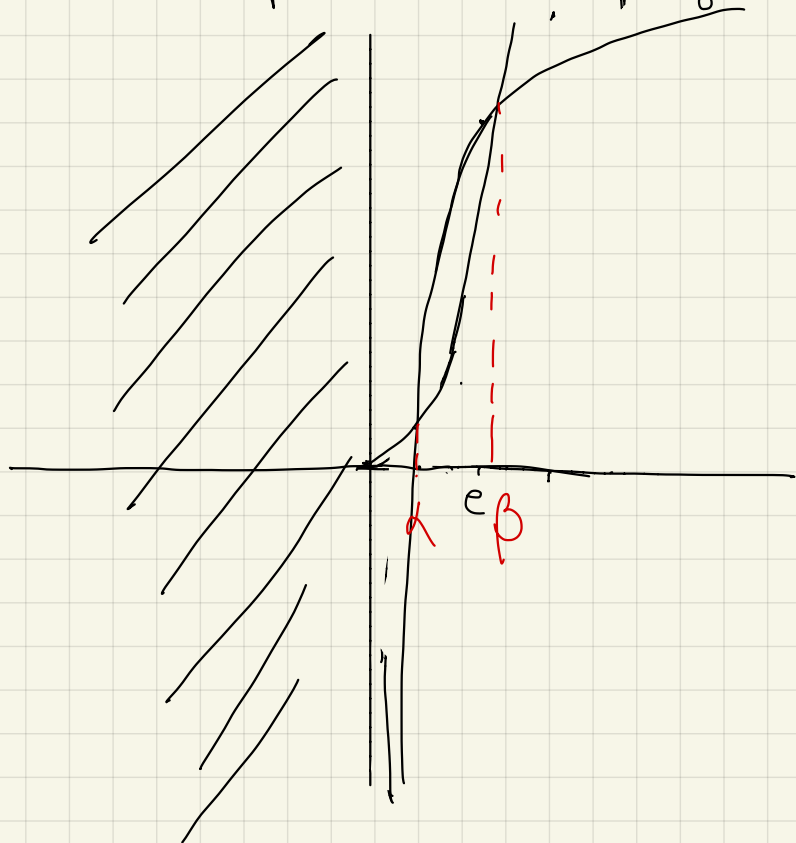


Correzione prova scritta del 16/12/2024

Es 1.

$$f(x) = x^2 - 8 \log x \quad x > 0$$

2) Dalla separazione grafica $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \log x$



2 soluzioni reali $1 < \alpha < 2$, $2 < \beta < 3$

$$f(1) = 1 - 8 \cdot 0 = 1 > 0$$

$$f(2) = 4 - 8 \cdot \log 2 < 0$$

$$\Rightarrow 1 < \alpha < 2$$

$$f(2) < 0$$

$$f(3) = 9 - 8 \log 3 \approx 0.211 > 0$$

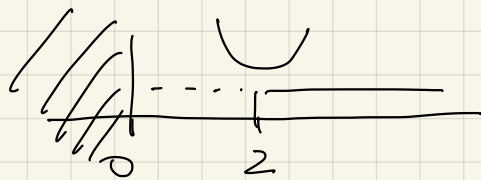
$$\} \Rightarrow 2 < \beta < 3$$

b) $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = 0$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm 2$$

ammissibile solo $x = 2$

$$f'(x) > 0 \quad x > 2$$

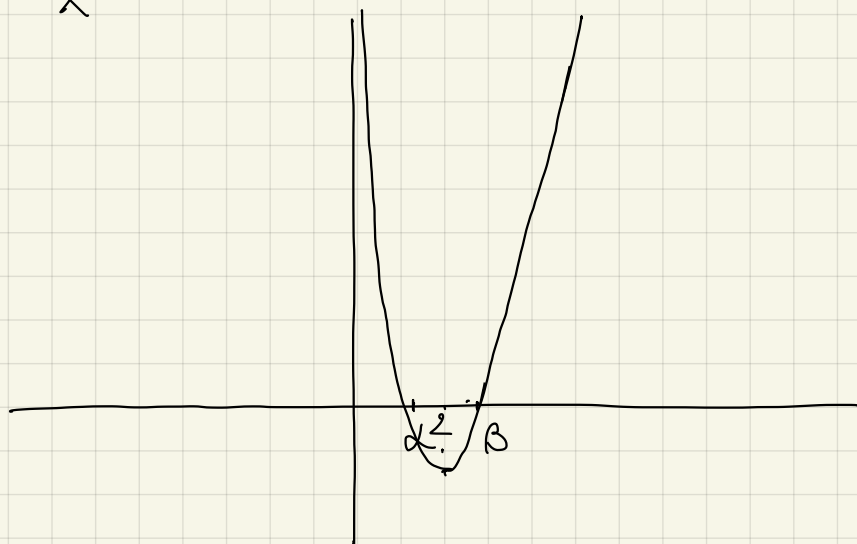


2 è un punto di minimo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 8 \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 8 \log x = +\infty$$

$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2} > 0 \quad \forall x$$



Si nota che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 2$ quindi
 $f'(x) \neq 0$ e $f'(2) = 0$ questo significa che
 α e β sono radici semplici e quindi otteno
 conv. locale di ordine nappire o uguale a 2.
 Poiché $f''(x) \neq 0 \quad \forall x$, l'ordine esatto
 è esattamente due.

Dal teorema di conv. in lungo ottengo che
 $\forall x \in (0, 2) \Rightarrow f'(x) \neq 0 \quad f(x) f''(x) > 0$

quindi la convergenza monotona cresce ad α

per $x_0 \in (0, \alpha)$.

Similmente per $x \in (\beta, +\infty)$ sono verificate le ipotesi del teorema di conv. in luogo e abbiamo che $x_0 \in (\beta, +\infty)$, la successione generata dal T_{coll} è monotona decrescente convergente a β .

Possiamo estendere l'intervallo di convergenza a $\mathbb{R}^2(2, +\infty)$ infatti se $x_0 \in (2, \beta) \Rightarrow x_1 \in (\beta, +\infty)$ e da qui convergo per quanto detto prima.

Per $x_0 \in (\alpha, 2)$ ho convergenza a α e $x_1 > 0$.

c)
$$x_{i+1} = e^{x_i^2/8}$$

$$\phi(x) = e^{x^2/8}, \quad \phi(x) \text{ è di classe } C^\infty$$

$x = \phi(x)$ è equivalente a $f(x) = 0$ in $\mathbb{R}$ infatti

$$x = e^{x^2/8} \Leftrightarrow_{x > 0} e^{\ln x} = e^{x^2/8} \Leftrightarrow \ln x = x^2/8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8 \ln x = 0$$

Quindi $x = \phi(x)$ ha come punti fissi α e β .

$$\phi'(x) = e^{x^2/8} \cdot \frac{2}{4} x = \frac{x}{4} e^{x^2/8}$$

si nota che $\phi'(x)$ è una funzione sempre crescente per $x > 0$

infatti

$$\phi''(x) = \frac{1}{4} e^{x^2/8} + \frac{x}{4} \cdot e^{x^2/8} \cdot \frac{x}{4} = \frac{e^{x^2/8}}{4} (1 + x^2) > 0$$

quindi $\phi'(1) < \phi'(2) < \phi'(2)$

ossia... $\approx \frac{1}{4} e^{1/8} < \phi'(2) < \frac{1}{2} e^{1/2} \approx 0.82 < 1$

quindi abbiamo convergenza locale di ordine 1 ed 2

Per β si nota che

$$\phi'(\beta) = \frac{\beta}{4} e^{\beta^2/8} = \frac{\beta^2}{4} \quad \beta = e^{\beta^2/8}$$

ma se $\beta > 2 \Rightarrow \frac{\beta^2}{4} > 1$ quindi non si ha convergenza a β .

def) Condizione necessaria del calcolo di $f(x)$

$$E_n = \frac{x}{f(x)} f'(x) E_x$$

$$E_n = \frac{x}{x^2 - 8 \log x} \cdot \left(2x - \frac{8}{x}\right) E_x = \frac{\cancel{x}}{x^2 - 8 \log x} \left(\frac{2x^2 - 8}{\cancel{x}}\right) E_x$$

$$E_n = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 8 \log x} E_x$$

si nota che il problema risulta malcondizi-
 onato per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow \beta$ poiché $x^2 - 8 \log x$ tende
 a zero.

per $x \rightarrow \infty$ invece il problema è ben condizionato
 poiché

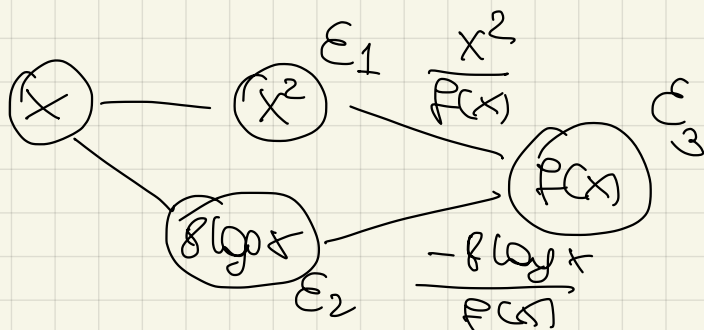
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 8 \log x} = 2$$

si nota che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{-8}{2x^2 - 8}}{\underset{+\infty}{x^2 - 8 \log x}} = 0$$

quindi il problema è ben condizionato anche
 per $x \rightarrow 0^+$.

Per la stabilità numerica il grafico



$$E_{\text{alg}} = E_3 + \frac{x^2}{f(x)} E_1 - \frac{8 \log x}{f(x)} E_2$$

Non abbiamo errore dovuto allo scalare come di 1 per $\log x$ perché $\beta = 2^3$ e questo comporta solo uno shift delle mantisse senza introdurre errore aggiuntivo.

$$|E_{\text{alg}}| \leq |E_3| + \frac{x^2}{|f(x)|} |E_1| + \frac{|8 \log x|}{|f(x)|} |E_2|$$

perché $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \alpha$, $x \rightarrow \beta$

abbiamo instabilità per $x \rightarrow \alpha$, $x \rightarrow \beta$

Es. 2.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & & 1 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

(2) Affinché i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono applicabili è necessario che gli elementi diagonali di A non divergano da zero in modo da poter invertire la matrice H .
 Nel m Jacobi risulta la diagonale di A
 e per GS la parte triangolare inferiore di A

Quindi J e $G.S.$ sono applicabili se e solo se $\alpha \neq 0$.

(b) $G = M^{-1}N$ con $M = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & & \\ & & 0 & \\ & & & \end{bmatrix}$

$M G = N \Rightarrow G = \begin{bmatrix} | & & | & | \\ 0 & \dots & 0 & g \\ | & & | & | \end{bmatrix}$

dove

$Mg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$

$\alpha g_1 = -1$

$g_1 = -\frac{1}{\alpha}$

$g_1 + \alpha g_2 = 0$

$g_2 = -\frac{1}{\alpha} g_1 = \frac{1}{\alpha^2}$

$\vdots$

$g_{n-1} + \alpha g_n = 0$

$g_n = -\frac{1}{\alpha} g_{n-1} = (-1)^n \frac{1}{\alpha^n}$

$\Rightarrow$

$G = \begin{bmatrix} | & & | \\ 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha^3} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \end{bmatrix} \\ | & & | \end{bmatrix}$

G è triangolare superiore e i suoi autovalori sono per tutti 0 con molteplicità $n-1$ e $\frac{(-1)^n}{\alpha^n}$.

quindi

$\rho(G) = \frac{1}{|\alpha|^n} < 1 \Leftrightarrow |\alpha| > 1$

(c) Per il metodo di Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$J = -\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha} Z \quad \text{con} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori di J possono notare che questi sono $\lambda_J = -\frac{1}{\alpha} \cdot \lambda_Z$.

Poiché

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \dots Z^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} Z Z^T$$

e $Z^n = I$ allora che $|\lambda_Z| = 1$

$$\text{quindi} \quad \left| \lambda_J \right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

Jacobi quindi risulta convergente se e solo se $|\alpha| > 1$.

(d) Un passo del metodo di Jacobi
risultare

$$x_i^{(u+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(u)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(u)} \right] \quad i=1 \dots n$$

quindi nel nostro caso

$$x_1^{(u+1)} = \frac{1}{a} [b_1 - x_n^{(u)}]$$

$$x_i^{(u+1)} = \frac{1}{a} [b_i - x_{i-1}^{(u)}] \quad i=2 \dots n$$

La funzione matlab risulta allora

```
function [xnew, u] = jacob1(b, alfa, tol)
n = length(b)
```

```
xold = zeros(n, 1);
```

```
err = Inf;
```

```
xnew = zeros(n, 1)
```

```
For k = 1: 1000
```

```
    if err < tol
```

```
        break;
```

```
    else
```

```
        xnew(1) = (b(1) - xold(n)) / alfa;
```

```
        for i = 2:n
```

```
            xnew(i) = (b(i) - xold(i-1)) / alfa;
```

```
        end
```

$err = \text{norm}(x_{\text{new}} - x_{\text{old}});$

$x_{\text{old}} = x_{\text{new}};$

end

end.