Calcolo Numerico
Foglio di esercizi sulla soluzione di sistemi lineari

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Aprile 2024

Esercizi su Norme

Esercizio 1. Si dimostri che la seguente funzione $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$

$$f(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2| + \|\mathbf{x}\|_\infty$$

è una norma.

Esercizio 2. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che

$$\|\mathbf{x}\mathbf{y}^T\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \, \|\mathbf{y}\|_2.$$

Suggerimento: Si sfruttino le proprietà della matrice $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ di cui si conoscono gli autovalori.

Esercizio 3. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definisce esponenziale di matrice la matrice

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

Si dimostri che per ogni norma matriciale, e per ogni A risulta

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Esercizio 4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e sia $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ la j-esima colonna di A. Dimostrare che la funzione $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ definita come

$$\phi(A) = \max_j \|\mathbf{a}_j\|_2$$

non definisce una norma matriciale.

Esercizio 5. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 3a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, a > 0.$$

Si determini il valore del parametro reale a per cui il numero di condizionamento $\mu_\infty(A)$ sia minimo.

Esercizi su risoluzione di sistemi

Esercizio 6. Si considerino le matrici $L, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definite nel seguente modo

$$l_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & i = j+1 \\ 0 & \text{altrmenti} \end{cases} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -2 & i = j+1 \\ 0 & \text{altrmenti} \end{cases}$$

a) Si dimostri che le due matrici L ed M sono invertibili,

b) Si calcoli $\mu_\infty(L), \mu_\infty(M)$.

c) Si scriva una funzione Matlab (di complessità lineare) `y=inf_bisolve(A, b)` che, presa una matrice bidiagonale inferiore ed un vettore colonna `b`, resituisca il vettore `y` tale che $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

d) Per $n = 10^3$ sia `x=rand(n,1)`, `b_1=L*x` e `b_2=M*x`. Utilizzando la funzione scritta si calcolino le soluzioni dei sistemi $L\mathbf{y_1} = \mathbf{b_1}$ e $M\mathbf{y_2} = \mathbf{b_2}$, che in aritmetica esatta produrrebbero le soluzioni $\mathbf{y_1} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{y_2} = \mathbf{x}$.

   Si riportino gli errori relativi in norma infinito, cioè

$$\frac{\|\mathbf{y_i} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}, \quad i = 1, 2.$$

   Si motivi il risultato alla luce del teorema sul condizionamento dei sistemi lineari.

e) Si ripeta lo stesso ragionameto ma scegliendo `x=ones(n,1)`. Cosa si ottiene in questo caso? Motivate la risposta.

Esercizio 7. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = (a_{i,j})$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha \text{ se } i = j; i \neq n \\ \beta \text{ se } i = 1, j = n; \\ 2 \text{ se } i = n, 1 \leq j \leq n; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si determini $k > 0$ tale che A è invertibile $\forall \alpha, \beta$ con $|\alpha| > k$ e $|\beta| < k$.
2. Si determini per quali valori di α e β la matrice A ammette fattorizzazione LU.

3. Per tali valori si determini la fattorizzazione LU.

4. Si determini per quali valori di α e β la matrice risulta singolare.

5. Si scriva una funzione Matlab che, presi in ingresso α, β ed il vettore $\mathbf{b}$ implementi un metodo a costo lineare in termini di operazioni aritmetiche ed occupazione di memoria per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Esercizio 8. Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matrice ad albero simmetrica

$$A_n = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Si dimostri per induzione che vale

$$\det(A_n) = \beta^n - (n-1)\alpha^2\beta^{n-2}.$$

b) Sia J la matrice tale che $J_{ij} = 1$ se $i + j = n$ e zero altrimenti, si dica quale è la struttura della matrice $B = JAJ$.

c) Si dica se, scegliendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, sono garantite le condizioni di esistenza ed unicità della fattorizzazione LU di A, e di B.

d) Si scriva una funzione Matlab `function [L, U]=lu_tree(alpha,beta)` che, presi in ingresso i valori α e β, e senza costruire in modo esplicito la matrice B, restituisca le matrici L e U della fattorizzazione LU di B.

Esercizio 9. Sia $A = I - \alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = [1, 1, \ldots, 1]^T$.

a) Si diano condizioni sufficienti su α affinché la matrice risulti invertibile.

b) Si diano condizioni su α affinchè la matrice ammetta fattorizzazione LU e si determini tale fattorizzazione.

c) Si dica quali sono gli autovalori di A.

Esercizio 10. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i < j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si calcoli A^{-1} .

b) Si calcoli $\mu_\infty(A)$.

Esercizio 11. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ \alpha & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Si dica se esistono valori del parametro α per cui la matrice è a predominanza diagonale.

a) Si dica per quali valori del parametro reale α, la matrice A ammette fattorizzazione LU.

b) Per tali valori si calcoli tale fattorizzazione e si dica se la fattorizzazione è unica.

c) Si implementi in Matlab il processo di costituzione all'indietro per la risoluzione del sistema $Ux = b$, e si testi la funzione con `b=ones(n,1)`

Esercizio 12. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$ tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si dimostri che $\mu_2(A) = \rho(A)\rho(A^{-1})$.

b) Utilizzando il teorema di Gerschgorin si mostri che $\mu_2(A) \leq (n+2)/(n-2)$.

c) Si dimostri che A ammette fattorizzazione LU.

d) Determinare il costo computazionale del calcolo di tale fattorizzazione.