1 Lights out!

Gli esercizi di questo foglio sono un po' diversi da quelli "tipici" di algebra lineare; fateli solo se siete interessati: vi volevo far vedere un'applicazione interessante dell'algebra lineare.

Il gioco *Lights out!* è un rompicapo a cui si può dare una soluzione tramite l'algebra lineare. Considera una scacchiera $m \times n$; su ogni casella ci sono un interruttore e una lampadina. Ogni volta che si preme un interruttore, alcune lampadine cambiano di stato (cioè, se erano accese si spengono, e se erano spente si accendono). Queste lampadine sono:

- La lampadina nella stessa casella dell'interruttore;
- Le lampadine nelle quattro caselle adiacenti (o meno di quattro, se la casella è sul bordo).

Quindi per esempio premendo l'interruttore $(2,2)$ cambiano di stato le cinque lampadine in $(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)$, e premendo l'interruttore $(1,1)$ cambiano di stato le tre lampadine $(1,1),(1,2),(2,1)$. Le lampadine inizialmente sono in una certa configurazione (alcune accese, alcune spente), e lo scopo del gioco è arrivare a spegnerle tutte.

È più semplice da vedere che da spiegare: prova a giocare su `http://www.ueda.info.waseda.ac.jp/~n-kato/lightsout/`.

1. Prendiamo $m = n = 3$. Supponi di aver premuto l'interruttore in posizione $(1,1)$ x_1 volte, quello in posizione $(1,2)$ x_2 volte, $\dots$, quello in posizione $(3,3)$ x_9 volte. Sia c_1 il numero di volte che la lampadina $(1,1)$ ha cambiato stato, c_2 il numero di volte che la lampadina $(1,2)$ ha cambiato stato, $\dots$, c_9 il numero di volte che la lampadina $(3,3)$ ha cambiato stato. Dimostra che esiste una matrice A tale che $Ax = c$, e trovala esplicitamente.

2. Supponi di partire a fare le nostre mosse dalla configurazione del gioco risolto, in cui tutte le lampadine sono spente, e di nuovo di aver premuto l'interruttore in posizione $(1,1)$ x_1 volte, quello in posizione $(1,2)$ x_2 volte, $\dots$, quello in posizione $(3,3)$ x_9 volte. Per ogni $i = 1,2,\dots,9$, sia $b_i = 1$ se la lampadina i-esima è accesa alla fine delle mosse e $b_i = 0$ se la lampadina i-esima è spenta. Dimostra che $Ax \equiv b \mod 2$.

3. Supponi ora di partire da una qualunque configurazione iniziale, e di nuovo di aver premuto l'interruttore in posizione $(1,1)$ x_1 volte, quello in posizione $(1,2)$ x_2 volte, ..., quello in posizione $(3,3)$ x_9 volte. Per ogni $i = 1, 2, \dots, 9$, sia $d_i = 1$ se la lampadina i-esima ha cambiato stato (accesa/spenta) rispetto alla configurazione iniziale alla fine delle mosse e $d_i = 0$ se la lampadina i-esima è nello stesso stato della configurazione iniziale. Dimostra che $Ax \equiv d \mod 2$.

4. Sia ora per ogni $i = 1, 2, \dots, 9$ $e_i = 1$ se la lampadina è accesa nella configurazione iniziale e $e_i = 0$ se è spenta. Dimostra che se x è un vettore di numeri interi non negativi tali che $Ax \equiv e \mod 2$ allora una soluzione del gioco si ottiene premendo l'interruttore $(1,1)$ x_1 volte, l'interruttore $(1,2)$ x_2 volte, ..., l'interruttore $(3,3)$ x_9 volte.

5. Ora considera A come una matrice in $\mathrm{Mat}_{9\times 9}(\mathbb{Z}_2)$ e e come un vettore appartenente a $(\mathbb{Z}_2)^9$. Dimostra che $x \in (\mathbb{Z}_2)^9$ è tale che $Ax = e$ se e solo se il vettore x rappresenta una soluzione del gioco (fatta tutta di zeri e di uni).

6. Dimostra che se $A \in \mathrm{Mat}_{9\times 9}(\mathbb{Z}_2)$ è una matrice invertibile (in $\mathbb{Z}_2$) allora il gioco ha soluzione per ogni configurazione iniziale, altrimenti no.

7. Con l'eliminazione di Gauss, mostra che A è invertibile, e quindi il gioco ammette sempre soluzione.

8. Considera ora una versione del gioco su una scacchiera 2×2. Qual è la matrice $A_{2,2} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_2)$ corrispondente al gioco? Calcolane il determinante (in $\mathbb{Z}_2$) (con un metodo a tua scelta — l'importante è fare tutti i conti in $\mathbb{Z}_2$).

9. Data una scacchiera 2×2 con le due lampadine nella parte superiore accese ($(1,1)$ e $(1,2)$) e le altre due spente, quali sono le mosse da fare per spegnere tutte le luci?

10. Considera ora una versione del gioco su una scacchiera 2×3. Qual è la matrice $A_{2,3} \in \mathrm{Mat}_{6\times 6}(\mathbb{Z}_2)$ associata al gioco? Qual è il suo rango? Trova una base del suo nucleo.

11. Quanti elementi di $(\mathbb{Z}_2)^9$ ci sono nel nucleo di $A_{2,3}$? Quali vettori sono esattamente?

12. Verifica che per ogni $v \in \ker A_{2,3}$, applicare le mosse indicate da v lascia invariata la scacchiera.

13. Partendo dalla configurazione iniziale con tutte le lampadine spente (sempre per $m = 2, n = 3$), quante sono le posizioni (cioè le diverse configurazioni delle lampadine) raggiungibili?

14. In quanti modi diversi è possibile raggiungere ognuna di queste? (Per "modi diversi", intendiamo che due modi sono diversi se corrispondono a diversi vettori in $\mathbb{Z}_2$ che contano il numero di volte che ogni interruttore è stato premuto).

15. Data una scacchiera 2×3 con la sola lampadina nell'angolo in alto a sinistra accesa ($(1,1)$), qual è una possibile scelta delle mosse da fare per spegnere tutte le luci? Quali sono tutte le possibili soluzioni?

Con un *computer algebra system* (per esempio, SAGE, basato su Python) si possono verificare i ranghi delle matrici corrispondenti a dimensioni maggiori della scacchiera. Per esempio, così per curiosità, per $m = n = 4$ si ha $\operatorname{rank} A_{4,4} = 12$ (e quindi $\dim \ker A_{4,4} = 4$) e per $m = n = 5$ $\operatorname{rank} A_{5,5} = 23$ (e quindi $\dim \ker A_{5,5} = 2$).

2 Soluzioni

1. Quante volte cambia di stato la lampadina 1? Cambia di stato ogni volta che viene premuto l'interruttore in $(1,1)$, ogni volta che viene premuto quello in $(1,2)$ e ogni volta che viene premuto quello in $(2,1)$. Quindi $c_1 = x_1+x_2+x_4$. Una formula simile esiste per ogni lampadina; non è difficile trovarle tutte, ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{bmatrix}.$$

2. Dobbiamo solo dimostrare che $c_i \equiv b_i \mod 2$, che è ovvio: una lampadina è accesa se ha cambiato stato un numero dispari di volte, spenta se ha cambiato stato un numero pari di volte.

3. È lo stesso ragionamento del punto precedente!

4. Se cambi di stato un numero dispari di volte le lampadine con $e_i = 1$ e un numero pari di volte le lampadine con $e_i = 0$, allora alla fine sono tutte spente.

5. Stiamo sempre dicendo la stessa cosa... Qui devi solo stare attento a dimostrare entrambe le implicazioni: se x è una soluzione allora $Ax = e$, e se $Ax = e$ allora x è una soluzione.

6. Se A è invertibile, allora $Ax = e$ ha una soluzione per ogni scelta di $e \in (\mathbb{Z}_2)^9$, altrimenti esistono vettori tali che il sistema non è risolubile.

7. Si trovano pivot su tutte le colonne.

8. $$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det A = 1.$$

9. Bisogna risolvere il sistema $A_{2,2}x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (in $\mathbb{Z}_2$), che ha soluzione $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10.
$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} A_{2,3} = 4.$$

    Una base del suo nucleo è $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. Gli elementi del nucleo sono tutti quelli della forma $\{x_1v_1 + x_2v_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2\}$, quindi quattro (corrispondenti a due scelte per x_1 e due per x_2). Esplicitamente, sono $0, v_1, v_2, v_1 + v_2$.

12. Basta verificarlo per v_1 e per v_2.

13. Sono tutti gli elementi di $\operatorname{im} A_{2,3}$. Visto che $\dim \ker M = 2$, $\dim \operatorname{im} M = 4$ (rank-nullity theorem). Quindi le configurazioni sono 2^4.

14. Ognuna si raggiunge in quattro modi diversi: dato un modo di raggiungerla x, gli altri tre sono $x + v_1$, $x + v_2$, $x + v_1 + v_2$. Perché non ce ne sono altri? Perché se due possibili mosse x e y raggiungono la stessa configurazione e, allora $A_{2,3}x = A_{2,3}y = e$ e quindi $A(x - y) = A_{2,3}x - A_{2,3}y = e - e = 0$, quindi $x - y \in \ker A_{2,3}$. Difatti, nota che $2^4 \cdot 4$ è proprio uguale al numero di diversi “vettori di mosse” possibili.