1 Esercizi

1. In uno spazio vettoriale V ci sono tre vettori v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti. Cosa possiamo dire sulla dimensione di V?

2. In uno spazio vettoriale V ci sono tre vettori v_1, v_2, v_3 linearmente *dipendenti*. Cosa possiamo dire sulla dimensione di V?

3. In uno spazio vettoriale V ci sono tre vettori v_1, v_2, v_3 che generano lo spazio (cioè, $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = V$). Cosa possiamo dire sulla dimensione di V?

4. Dimostrare direttamente (=verificando la definizione, senza appellarsi al teorema che dice cosa succede riducendo a scala la matrice che li ha per colonne) che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

5. Qual è la dimensione di $V = \operatorname{span}\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$?

6. Dimostrare che $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è una base di V.

7. Trovare un'equazione lineare soddisfatta da tutti i vettori di V

8. Trovare una matrice A tale che $V = \ker A$.

9. Mostrare che $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Quali sono le componenti del vettore $\begin{bmatrix} 5 \\ t \\ 5 \end{bmatrix}$ in questa base?

10. Considera l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \\ 2x + 2y \end{bmatrix}$.
    Qual è la matrice associata a f nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$?

11. Qual è la matrice associata a f nelle basi $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ (base di $\mathbb{R}^2$) e $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ (base di $\mathbb{R}^3$)?

12. Qual è l'immagine di f?

13. Qual è il nucleo di f?

14. Sapresti scrivere un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che ha come immagine span($\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$) e come nucleo span($\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$)? Scrivi la sua matrice associata rispetto alle basi canoniche dei due spazi.

15. Sapresti scrivere un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ che ha come immagine span($\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$) e come nucleo span($\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$)? Scrivi la sua matrice associata rispetto alle basi canoniche dei due spazi.

16. Considera l'applicazione lineare dallo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ in sé definita da $f(ax^2+bx+c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a)$. Scrivi la sua matrice associata rispetto alla base $x^2, x, 1$.

17. Qual è il suo nucleo? Qual è la sua immagine?

18. Considera i vettori $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)^3$ (aritmetica modulo 5!). Sono linearmente indipendenti?

19. Quanti elementi ha $(\mathbb{Z}_5)^3$?

20. Quanti elementi ha span$\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} \} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$

2 Soluzioni

1. Che $\dim V \geq 3$. Infatti è sempre possibile completare v_1, v_2, v_3 a una base, che quindi ha almeno tre vettori.

2. Niente! Per esempio v_1, v_2, v_3 potrebbero essere tutti multipli dello stesso vettore, o anche tutti uguali al vettore nullo.

3. Che $\dim V \leq 3$. Infatti da v_1, v_2, v_3 è sempre possibile estrarre una base.

4. Dobbiamo verificare che $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ solo quando $x_1 = x_2 = 0$, cioè che il sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$
ha solo la soluzione 0. E poi anche che il sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \end{cases}$$
ha soluzione per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Dimensione 2, si vede riducento a scala la matrice che ha quei tre vettori per colonne.

6. Basta ridurre a scala la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$: la sua immagine contiene V ed ha dimensione 2, quindi coincide con V, e le prime due colonne ne formano una base perché i pivot stanno nelle prime due colonne.

7. Bisogna trovare tutti i vettori che si scrivono come combinazione lineare di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Scriviamo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix}$ e riduciamo a scala, ottenendo

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x \end{bmatrix}$. Quindi i vettori $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ che non sono linearmente indipendenti da $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono quelli per cui $x - z = 0$.

8. Scrivendo l'equazione del punto prima come prodotto matrice-vettore otteniamo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Risolvendo il sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ t \\ 5 \end{bmatrix}$ troviamo le componenti di base $x = \begin{bmatrix} 45-8t \\ 6t-30 \\ 5-t \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

12. $\operatorname{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix})$.

13. $\operatorname{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix})$.

14. Un'applicazione lineare è univocamente determinata dal suo comportamento su una base, per esempio quella canonica. Dobbiamo avere $f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ per la seconda condizione. Per soddisfare la prima, possiamo scegliere $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ come un multiplo a nostro piacere di $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, per

esempio $f(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$. La matrice associata a questa applicazione lineare quindi è $\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 4\\0 & 6\end{bmatrix}$. (perché?)

15. Questa volta la condizione sul nucleo è più complicata. Per semplificarla, scegliamo una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$. Per fare questo, estraiamo una base dall'insieme di generatori formato dalle colonne di $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ riducendo a scala questa matrice. La base è formata da v_1, v_2 e i primi due vettori della base canonica, che chiameremo v_3 e v_4. Ora, dobbiamo avere $f(v_1) = f(v_2) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, e dobbiamo scegliere $f(v_3)$ e $f(v_4)$ in modo che $\operatorname{span}\{f(v_3), f(v_4)\} = \operatorname{span}\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\}$. Il modo più semplice è proprio $f(v_3) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $f(v_4) = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$. Quindi la nostra applicazione lineare è definita come quell'unica funzione tale che $f(v_1) = f(v_2) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $f(v_3) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $f(v_4) = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ (perché è unica?). Le colonne della sua matrice associata sono le immagini dei quattro vettori della base canonica.

I primi due sono proprio v_3 e v_4, quindi è facile dire che le prime due colonne sono $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Per trovare le altre due colonne, dobbiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4,$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4 :$$

i coefficienti vengono $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Quindi

$$f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + x_3 f(v_3) + x_4 f(v_4) =$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e analogamente

$$f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi la matrice associata a f è formata dalle immagini dei quattro elementi della base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

17. $\ker f = \operatorname{span}\{x^2 + x + 1\}$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{x^2 - 1, x - x^2\}$ (di dimensione 2).

18. No! Riducendo a scala si trova un pivot uguale a 5, e $5 \equiv 0$.

19. I suoi elementi sono vettori di lunghezza 3; ogni elemento può essere scelto tra i soli $0, 1, 2, 3, 4$, quindi in 5 modi diversi; in totale abbiamo $5^3 = 125$ elementi.

20. Una base di questo sottospazio è $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ogni elemento si scrive in modo unico come $x_1v_1 + x_2v_2$ per qualche $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5$. Scelte diverse danno vettori diversi. Quindi il numero di vettori è pari al numero di scelte possibili per x_1 e x_2, cioè $5^2 = 25$.