Lezione del 15/11/2023

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}^n$) f è una norma $(\|.\|)$

- $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0 \iff x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha| \cdot f(x)$ $\alpha \in \mathbb{C}$
- $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

Norme matriciali

Def: $f: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}^{n \times n}$) è una norma matriciale

a) $f(A) \geq 0$ e $f(A) = 0 \iff A = O_{n \times n}$

b) $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

c) $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$

d) $f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)$ $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$f = \|.\|$

$\|I\| \geq 1$

$\|I\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ ✗

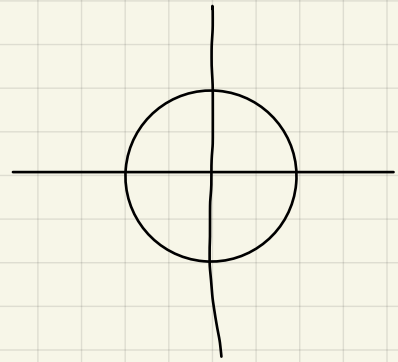
$\|I\| \leq \|I\| \cdot \|I\| = \|I\|^2 \iff \|I\| \geq 1$

Norme matriciali indotte

$$\|A\| \triangleq \max_{\|v\|=1} \|Av\|$$

$\mathbb{R}^2$ $\quad \|x\|_2 = 1 \quad x \in \mathbb{R}^2$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \|\cdot\| \text{ è una norma matriciale indotta} \\ \|I\| = \max\limits_{\|v\|=1} \|Iv\| = 1 \end{array}}$$

norma di Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{traccia}(A^T A)}$$

è una norma (a, b, c, d)

$\|I\|_F = \sqrt{n}$ quindi la $\|\cdot\|_F$ non è una norma matriciale indotta

Compatibilità tra norme vettoriali e matriciale indotta

Teorema:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ab\|_v \leq \|A\|_m \cdot \|b\|_v$$

norma matriciale indotta da $\|\cdot\|_v$

Dim:

$b = 0 \qquad \|b\| = 0 \qquad \|Ab\| = 0 \qquad \checkmark$

$b \neq 0 \qquad \|b\| \neq 0$

per ogni $y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = 1$ vale

$$\|Ay\| \leq \|A\| = \max_{\|v\|=1} \|Av\|$$

$$y = \frac{b}{\|b\|} \qquad \|y\| = \left\| \frac{b}{\|b\|} \right\| = \left\| \underbrace{\frac{1}{\|b\|}}_{\alpha} \cdot b \right\| = \frac{1}{\cancel{\|b\|}} \cdot \cancel{\|b\|}$$

$$\frac{1}{\|b\|} \cdot \|Ab\| = \left\| A \cdot \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \|A\| \qquad \text{cioè} \quad \|Ab\| \leq \|A\| \cdot \|b\|$$

<u>Teorema</u>:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$\rho(B)$ è il raggio spettrale

$$\rho(B) = \max_{i=1 \dots n} |\lambda| \qquad \lambda \text{ autovalore di } B.$$

$$\boxed{|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{modulo di un numero complesso}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{|1| + |-2|, \ |-1| + |3|\} = 4$$

$$\|A\|_\infty = \max\{2, 5\} = 5$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A - \lambda I) = (5-\lambda)(10-\lambda) - 49 = \lambda^2 - 15\lambda + 1$$

$$\Delta = 15^2 - 4 > 0 \rightarrow$$ gli autovalori sono reali perché $A^T A$ è simmetrica.

$$\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4}}{2}$$

$$\rho(A^T A) = \frac{15 + \sqrt{15^2 - 4}}{2}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{15^2 - 4}}{2}}$$

Se $A = A^T \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$

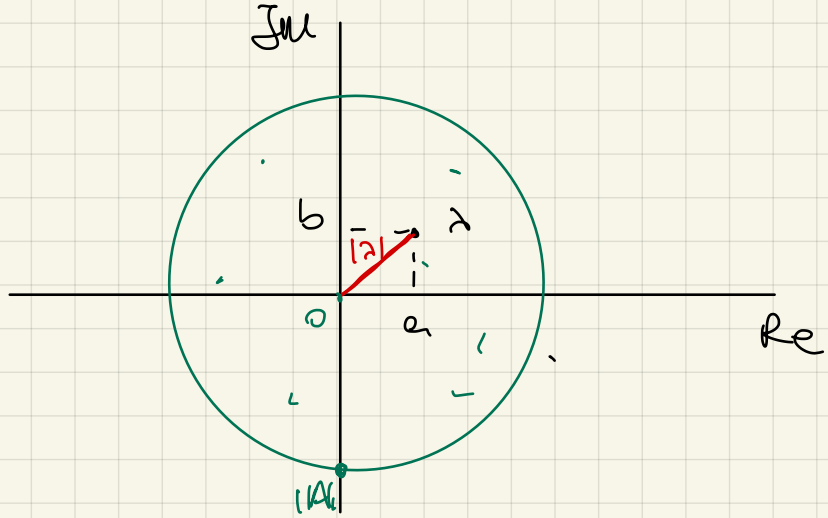
Se $A = A^T \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$ Più in generale:

Teorema di Hirsh

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad \forall \text{ ogni } \|\cdot\| \text{ matriciale indotta}$$

per esercizio $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ calcolare gli autovalori.

e per vedere se $\underline{|\lambda|} < \|A\|_1 = 4$



Dimo:

$$Av = \lambda v \quad , \quad v \neq 0$$

applichiamo la norma vettoriale che induce la $\|\cdot\|$ matriciale

$$|\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

dividendo per $\|v\| > 0$

$$|\lambda| \leq \|A\| .$$

$z_j = a_j + i b_j$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad z_i \in \mathbb{C}$$

$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j^2 + b_j^2}}$$

$$\|z\|_\infty = \max |z_j| = \max \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

ha una sola soluzione se

- $\det A \neq 0$
- A è non singolare
- A è invertibile
- $\text{rank}(A) = n$
- $\dim \text{Ker}(A) = 0$
- righe e colonne l.i
- colonne l.i dopo Gauss
- $\lambda \neq 0$

A invertibile

Condizionamento delle soluzione di $Ax = b$

a_{ij} $\qquad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}(1 + \varepsilon_{ij}) \qquad |\varepsilon_{ij}| < u$

b_i $\qquad \tilde{b}_i = b_i(1 + \varepsilon_i) \qquad |\varepsilon_i| < u$

$Ax = b$ $\qquad \boxed{\det A \neq 0}$

$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

per semplificare la dimostrazione si assume che $\tilde{A} = A$

$$Ax = b \qquad x = A^{-1}b$$

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \qquad \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$$

$$\|\tilde{x} - x\| = \|A^{-1}\tilde{b} - A^{-1}b\| = \|A^{-1}(\tilde{b} - b)\|$$

$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$$

compatibilità tra norme

$$\|x\| \overset{?}{\geq} \qquad \|x\|\|A\| \geq \|Ax\| = \|b\|$$

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{\text{numero di condizionamento di } A} \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\tilde{b}_i := b_i(1+\varepsilon_i) \qquad |\varepsilon_i| < u$$

$$\tilde{b} = b + e \qquad \|\tilde{b} - b\|_\infty = \|e\|_\infty \leq u \cdot \|b\|_\infty$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mu_\infty(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \mu_\infty(A) \; u$$

$$\mu_\infty(A) \geq 1$$

esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+10^{-10} & 1-10^{-10} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1+u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ricevimento martedì dalle 14.30 – 17.30

370

$Ax = b$ $\qquad$ $\boxed{\det A \neq 0 \quad , \quad b \neq 0}$

$\boxed{\det A \neq 0 \quad Ax = 0 \iff x = 0}$ ← per evitare

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$
$$Ax = b$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \, \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ numero di condizionamento

$$\tilde{A}\tilde{x} = b \qquad \tilde{A} = A + \varepsilon E$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \lesssim \mu(A) \, \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}$$

Autovalori

Def: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, (λ, x) sono autovalore e autovettore per A se

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n$

$k = \#$ autoval distinti

$$p(z) = \det(A - zI) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (z - \lambda_i)^{\sigma_i} = 0$$

λ_i è autovalore e σ_i è la molt. algebrica

$$\prod_{i=1}^{k} (z - \lambda_i)^{\sigma_i} = (z - \lambda_1)^{\sigma_1} (z - \lambda_2)^{\sigma_2} \cdots (z - \lambda_k)^{\sigma_k}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = n$$

$\tau_i = \dim(\ker(A - \lambda_i I))$ molteplicità geometrica

$$A - zI = \begin{bmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - z & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - z \end{bmatrix}$$

se λ è autovalore

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 4 = 0$$

Poiché $A - \lambda I$ è <u>non</u> invertibile (singolare) $\Rightarrow \exists\, x \neq 0$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax - \lambda x = 0 \iff Ax = \lambda x$$

Def.: A è diagonalizzabile se $\exists\, V$ invertibile:

$$V^{-1} A V = D \qquad D \text{ diagonale} \qquad D = \begin{bmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix}$$

$$d_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

$d_{ii} = \lambda_i$ autovalore di A

$$V = \left[x_1 \,\middle|\, x_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, x_n \right]$$

x_i autovettore relativo a λ_i

$$\underbrace{V V^{-1}}_{I} A V = V D$$

$$A V = V D$$

$$M e_i = m_i$$

colonna di

$$A V e_i = V D e_i \qquad i = 1 \dots n$$

$$A \left[x_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, x_i \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, x_n \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima}$$

$$A x_i = V d_i e_i$$

$$A x_i = d_i x_i$$

La matrice V del cambiamento di base contiene gli autovettori e la matrice D gli autovalori

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $x_1 \dots x_n$ sono l. indip.

$\Leftrightarrow$ $\sigma_i = \tau_i$

$(\sigma_i \geq \tau_i)$

Classi di matrici diagonalizzabili

- A simmetrica $\quad A = A^T \quad$ es $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

  V è ortogonale cioè $\quad V^T V = V V^T = I$

  $\boxed{\lambda \text{ sono reali}}$

  $$Ax = \lambda x \quad \Leftarrow$$

Per $n \geq 5$ posso solo approssimare gli autovalori perché non esiste formula risolutiva per eq. polinomiali di grado ≥ 5.

- A è hermitiana $\quad \boxed{A = A^H} = \overline{A^T}$ ← trasposto-coniugato

  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

  $$\overline{a+ib} = a - ib$$

  es $\begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 2-i & 5+2i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3-i & 5-2i \end{bmatrix}$, non è hermitiana

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{bmatrix}}_{A^T} \xrightarrow{\text{conj}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix}}_{A^H}$$

Se $A = A^H \Rightarrow \lambda$ sono reali

è diagonalizzabile

V è unitaria $\qquad V^H V = V V^H = I$

- λ_i tutti distinti $\qquad \sigma_i = \tau_i \geq 1 \quad \forall i$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile poiché ad autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti

Condizionamento del calcolo di autovalori

$\lambda \qquad \sigma_1 = \tau_1 = 1 \qquad$ autovalore semplice

$Ax = \lambda x \qquad$ x autovettore dx

$y^T A = \lambda y^T \qquad$ y autovettore sin (assumiamo $y \in \mathbb{R}^n$)

$y^T x \neq 0$

$\tilde{A} = A + \varepsilon E$

$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x} \qquad |\tilde{\lambda} - \lambda|$ errore assoluto

Si può dimostrare che se ε è "piccolo"

$$\tilde{x} \doteq x + \varepsilon z$$
$$\tilde{\lambda} \doteq \lambda + \eta \varepsilon \qquad \text{voglio limitare } |\eta|$$

$|\eta|$ è piccolo $\Rightarrow$ ben condizionato

grande $\Rightarrow$ mal condizionato

$$\underbrace{(A + \varepsilon E)}_{\tilde{A}} \underbrace{(x + \varepsilon z)}_{\tilde{x}} = \underbrace{(\lambda + \eta \varepsilon)}_{\tilde{\lambda}} \underbrace{(x + \varepsilon z)}_{\tilde{x}}$$

$$Ax + \varepsilon E x + \varepsilon A z + \cancel{\varepsilon^2 E z} = \lambda x + \eta \varepsilon x + \lambda \varepsilon z + \cancel{\eta \varepsilon^2 z}$$

$$\cancel{Ax} + \cancel{\varepsilon} E x + \cancel{\varepsilon} A z \doteq \cancel{\lambda x} + \eta \cancel{\varepsilon} x + \cancel{\varepsilon} \lambda z$$

$$A z + E x \doteq \lambda z + \eta x \qquad \Leftarrow$$

$$y^T \cancel{A} z + y^T E x \doteq \lambda \cancel{y^T} z + \eta y^T x \qquad \Leftarrow$$

$$\eta = \frac{y^T E x}{y^T x} \qquad \text{se } y^T x \neq 0$$

Cauchy-Schwartz

$$|\eta| = \frac{1}{|y^T x|} \cdot |y^T E x| \leq \frac{1}{|y^T x|} \cdot \|y\|_2 \, \|Ex\|_2 \leq \frac{\|y\|_2 \, \|E\|_2 \cdot \|x\|_2}{|y^T x|}$$

possiamo assumere

$$\|y\|_2 = \|x\|_2 = 1$$

C.S.

$$|y^T x| \leq \|y\|_2 \cdot \|x\|_2$$

$$|\eta| \leq \frac{\|E\|_2}{|y^T x|}$$

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \varepsilon \frac{\|E\|_2}{|y^T x|}$$

$\frac{1}{|y^T x|}$ è il coeff. di amplifica

Per matrici simmetriche e hermitiane

$$y^T x = 1 \qquad y^* x = 1$$

$\Rightarrow$ il prob. è ben condizionato.

Localizzazione degli autovalori

Cerchi di Gershgorin

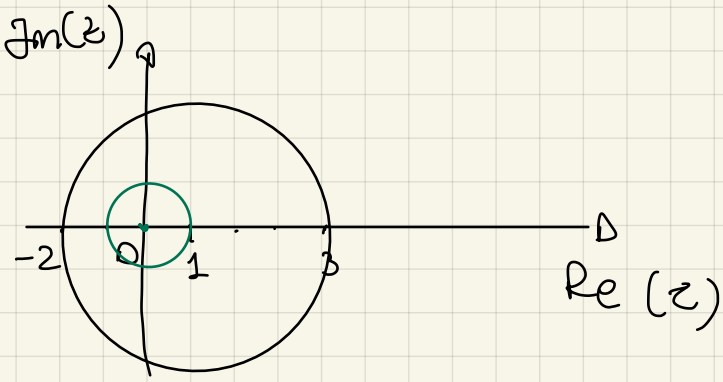
A ad ogni riga di A

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

centro

raggio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Teo: Se λ è autovalore di A $\Rightarrow$

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

Uso del teorema è per dire che un certo valore <u>non</u> è autovalore

Teo: Se λ è autovalore di A $\Rightarrow$

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

$$\boxed{K_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}}$$

Dim: Se λ è autovalore di A $\Rightarrow$ $\exists\, x,\ x \neq 0$

$$Ax = \lambda x$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = \lambda x_i \qquad i = 1 \dots n$$

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1 \dots n$$

Sia p un indice tale che

$$|x_p| = \max_{j=1 \dots n} |x_j|$$

$$(\lambda - a_{pp}) x_p = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j$$

Passiamo ai moduli e applichiamo la disuguaglianza triangolare

$$|\lambda - a_{pp}| \, |x_p| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \, |x_j|$$

$|x_p| > 0$

$$|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \underbrace{\frac{|x_j|}{|x_p|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}|$$

cioè $\lambda \in K_p$ e quindi $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

<u>OSS</u>: A^T e A hanno gli stessi autovalori

$$0 = \det(A - \lambda I) = [\det(A - \lambda I)]^T = \det(A^T - \lambda I)$$

$H_i \leftarrow$ cerchi di G. di A^T (cioè i cerchi per colonna di A)

$H_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ji}| \}$

$$\Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

cioè $\lambda \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i \right)$

<u>es</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 15| \leq 4 \}$

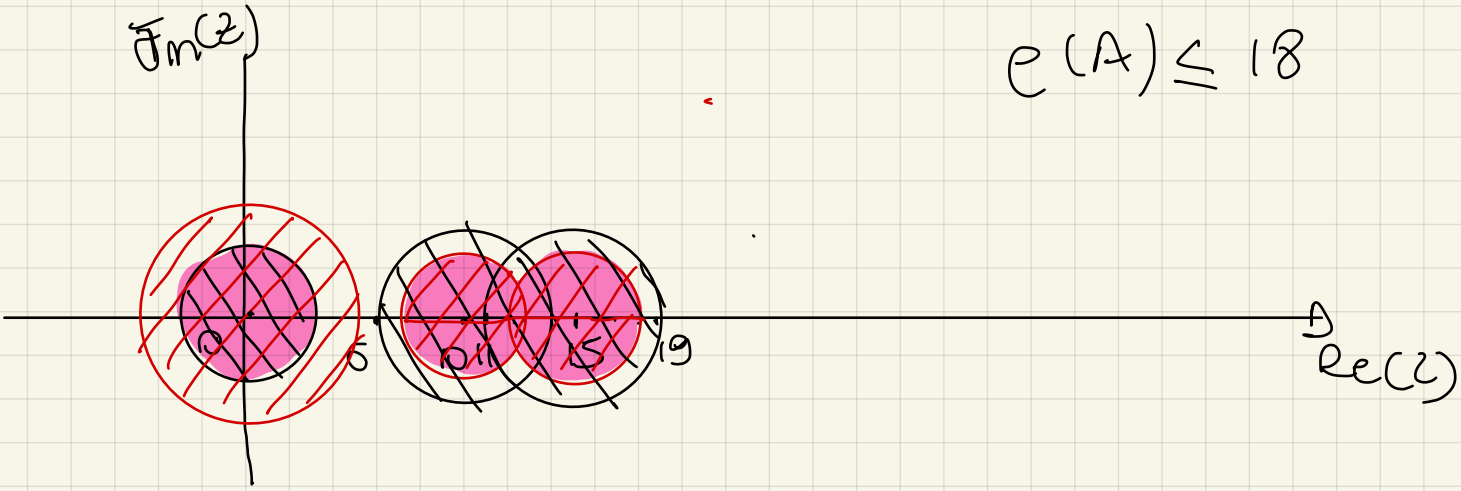
$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 10| \leq 4 \}$

$K_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3 \}$

$H_1 \leftarrow c_1 = 15 \quad r_1 = 3$

$H_2 \leftarrow c_2 = 10 \quad r_2 = 3$

$H_3 \leftarrow c_3 = 0 \quad r_3 = 5$



$\rho(A) \leq 18$

<u>Teorema</u>: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se l'unione M_1 di m cerchi è disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti $n-m$ cerchi $\Rightarrow$ m autovalori appartengono a M_1 e $n-m$ a M_2

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad n \geq 2$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ \alpha & \text{se } i = 1,\ j = 2 \dots n \\ \alpha & \text{se } i = n,\ j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) A è non singolare per $|\alpha| < 1$ e singolare se $|\alpha| = 1$

b) $\det A = 1 - \alpha^2 \Rightarrow$ A è invertibile $\Leftrightarrow$ $|\alpha| \neq 1$

$$\lambda \in \left(\bigcup K_i\right) \cap \left(\bigcup H_i\right)$$

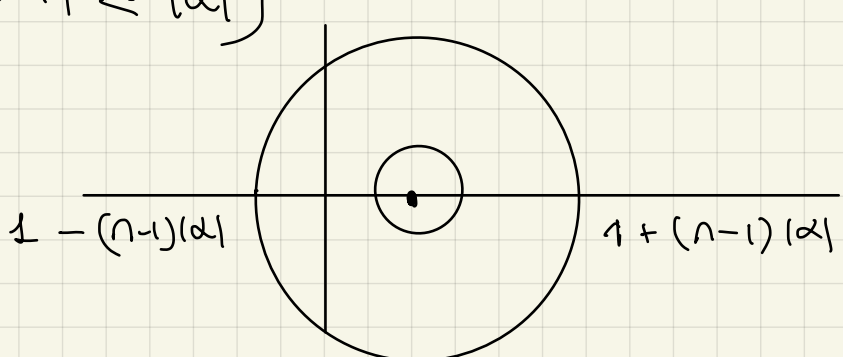
$$0 \notin \left(\bigcup K_i\right) \cap \left(\bigcup H_i\right)$$

$$K_1 = \{z \mid |z - 1| \leq (n-1)|\alpha|\}$$

$$K_2 \equiv K_3 \equiv \dots \equiv K_{n-1} = \{z = 1\}$$

$$K_n = \{z : |z - 1| \leq |\alpha|\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_i = K_1$$

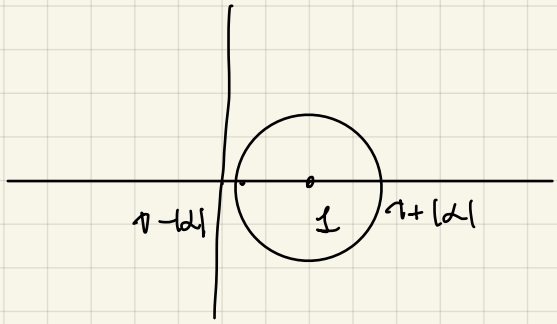


se

$1-(n-1)|\alpha| > 0$ $\qquad$ $K_1 \in \mathbb{C}^+$

$\lambda \notin K_1$ $\qquad$ $|\alpha| < \frac{1}{n-1}$

$H_i = \{ z \mid |z-1| \leq |\alpha| \}$ $\qquad$ $i = 1 - n$



$\lambda = 0 \notin \bigcup H_i$ se $1 - |\alpha| > 0$ $\boxed{|\alpha| < 1}$

Se $|\alpha| = 1$ non posso usare G.

se $\alpha = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

la prima e l'ultima colonna sono uguali

$\text{rango}(A) \leq n-1$

$\Rightarrow \det A = 0$

se $\alpha = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$c_1 = -c_n$

$|\alpha| < 1 \Rightarrow A$ è invertibile

$\overset{?}{\Leftarrow}$

Dal punto 2 vediamo che in realtà A è invertibile

$\Leftrightarrow$ $|\alpha| \neq 1$

quindi anche quando $0 \in \bigcup K_i$ se $|\alpha| \neq 1$
la matrice è invertibile ma $\lambda = 0$ non è autovalore

$\det A = 1 - \alpha^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

Provo con Laplace $\underline{\parallel}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$\boxed{j=1}$

$$\det A = 1 \cdot \det I_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot \underset{a_{n1}}{\alpha} \cdot \det \begin{bmatrix} \alpha & & \alpha \\ 1 & \ddots & \\ & & 1 \; 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} \alpha \cdot \left((-1)^{1+n-1} \alpha \cdot \det I_{n-2} \right)$$

$$= 1 + (-1)^{2n+1} \alpha^2 = 1 - \alpha^2$$

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}}_{A_n} = 1 \cdot \det A_{n-1} = \dots = \underbrace{1 \cdots 1}_{n-2} \cdot \det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} = 1 - \alpha^2$$

$$\det A = 1-\alpha^2 \neq 0 \qquad \forall\ \alpha : \quad |\alpha| \neq 1$$

c) $\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 1+|\alpha|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{1+(n-1)|\alpha|,\ 1,\ 1+|\alpha|\}$$

$$= 1+(n-1)|\alpha|$$

$$\cancel{1}+|\alpha| \leq \cancel{1}+(n-1)|\alpha| \qquad \boxed{n>1}$$

d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{n+2}$ se $\boxed{\alpha = 1}$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & & \alpha \\ \alpha & \ddots & \\ \vdots & & \\ \alpha & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1+\alpha^2 & \alpha \cdots \alpha \ \ 2\alpha \\ \hline \begin{matrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ 2\alpha \end{matrix} & \begin{matrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{matrix} (\alpha \cdots \alpha) + I \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right]$$

$\alpha = 1$

$$A^T A = \left[\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & \cdots & & & 1\,2 \\ \hline 1 & 2 & & & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & & & 1 & & 1 \\ 2 & 1 & & & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$K_1 =$

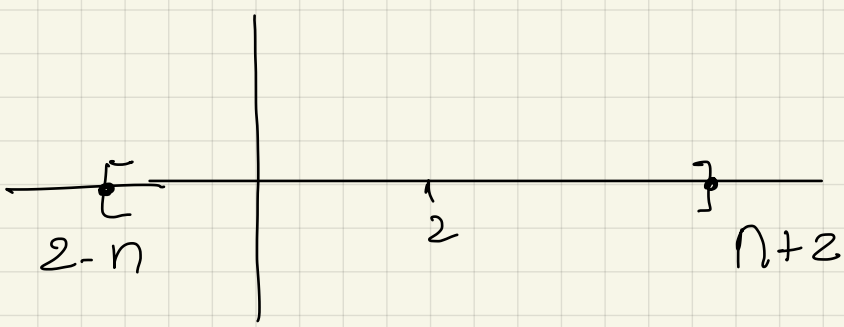
$c_1 = 2 \qquad r_1 = (n-2) + 2 = n$

$c_2 = 2 \qquad r_2 = n-1$

$\vdots$

$c_{n-1} = 2 \qquad r_{n-1} = n-1$

$c_n = 2 \qquad r_n = (n-2) + 2 = n$



$A^T A$ ha autov reali perché è simmetrica

$$\rho(A^T A) = \max |\lambda_i|$$

$$2-n \leq \lambda_i \leq n+2 \Rightarrow |\lambda_i| \leq n+2$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{n+2}$$

e) Fatt. LU

f) -

Esercizio

$$A = I + \alpha e e^T \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(1) Per quali valori di α A è invertibile?

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ \alpha & & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

A è invertibile $\iff$

$$\left[Ax = 0 \iff x = 0 \right]$$

$$Ax = \begin{bmatrix} \alpha+1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ \alpha & & \alpha+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(I + \alpha e e^T)x = x + \alpha e \underbrace{e^T x} = x + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) e$$

$$(1 \cdots 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + \alpha\left(\sum x_i\right) e = 0 \qquad \underline{x} = -\alpha\left(\sum x_i\right) e$$

$$x = -\alpha \boxed{} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 e \qquad \sum x_i = n \cdot x_1$$

$$\underbrace{x_1 \cdot e}_{= x} + \left(\alpha \underbrace{n \cdot x_1}_{\sum x_i}\right) e = 0$$

$$\underbrace{(1+\alpha n)x_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underset{\text{vettore}}{e} = 0 \iff (1+\alpha n)\, x_1 = 0$$

$x_1 = 0$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1+\alpha n = 0$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{n}}$$

Quindi A è invertibile $\iff$ $\alpha = -\frac{1}{n}$

$A+B$ come sono fatti gli autovalori?

in generale non si sa

$B = A^5$

$A + A^5$

$\lambda_A + \lambda_A^5$

$A^3 + 2A^2 - I$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$

$Ax = \lambda x$

$$A^2 x = A \cdot \underbrace{Ax} = \underbrace{A \cdot \lambda} x = \lambda \underbrace{Ax} = \lambda \cdot \lambda x = \lambda^2 x$$

$I + \alpha e e^T$ ha come autovalori

$1 + \lambda$

$I + A$

$1 + \lambda_A$

$Ax = \lambda x$

$(I + A)x = x + \underbrace{Ax} = x + \lambda x = (1+\lambda)x$

$$e e^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\dim \ker + \dim \operatorname{Im} = n$

$\operatorname{Im} = \operatorname{rango}(A) = 1$

$\dim(\ker(ee^T)) = n-1$

$\Rightarrow \exists\, z_1, z_2 \dots z_{n-1}$ vettori l. indi $z_i \neq 0$

$e \underbrace{\boxed{e^T z_i}}_{\text{numero}} = 0 \qquad i = 1 \dots n-1$

$e^T z_i = 0$

z_i sono ortogonali a e

ci sono almeno $n-1$ <u>autovalori</u> degenerati a zero

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

$$\lambda_n = n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} xy^T \text{ matrice di rango } 1 \\ \quad \text{ha } n-1 \text{ autovalori} = 0 \\ \quad\quad 1 \text{ autovalore} = x^T y \end{array}}$$

$$A = I + \alpha e e^T$$

$$1 + \alpha \lambda(ee^T) \begin{cases} 1 & \text{con molt. } n-1 \\ 1 + \alpha n & \text{con molt. } 1 \end{cases}$$

$$1 + \alpha n \neq 0 \iff \alpha \neq -\frac{1}{n}$$