

Esercitazione del 19/2/2025

Es 1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} & & 1 \\ \alpha & & \\ & \alpha & \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Si dimostra che $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \|A\|_2$
2. Si determina per quale α A è singolare.
3. Per gli α per cui A è invertibile si calcola A^{-1}
4. Si studi le condizioni sotto cui A in norme 2
cosa succede per $\alpha = \pm 1$?

ES2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definite pos

$$A = \alpha I + uu^T \quad \text{con} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini una condizione sufficiente e necessaria affinché A sia invertibile
- Si determinino tutti i valori di α per cui A è invertibile
- Si dimostri che quando A è invertibile vale $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} I - \gamma u u^T$, determinando γ .
- Si studi $\text{cond}(A, \infty) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty}$

Soluzioni

Es 1.

$$A = \begin{bmatrix} & & 1 \\ \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i-j=1 \quad i=2, \dots, n \\ 1 & \text{se } i=1, j=n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. $\|A\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max\{1, |\alpha|\}$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max\{|\alpha|, 1\}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & \alpha & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \alpha^2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

* $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$

ricordarsi come si fa le molt. a blocchi

Si osserva che $A^T A$ è una matrice diagonale. I suoi autovalori sono pertanto i valori diagonali e

$$\rho(A^T A) = \max\{1, \alpha^2\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\rho(A^T A)} = \begin{cases} 1 & \text{se } |\alpha| \leq 1 \\ |\alpha| & \text{se } |\alpha| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \max\{1, |\alpha|\}$$

2. Il teo di Gerschgorin non può essere usato per dire quando $\lambda=0$ è autovalore

infatti non permette di caratterizzare in modo completo gli autovettori; cosa non permette di determinare condizioni sufficienti per dire quando una matrice è non singolare.

Nel nostro caso possiamo immediatamente vedere che A è singolare se $\lambda = 0$ infatti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ha rango } 1$$

È $\lambda = 0$ l'unico valore per cui A è singolare? Possiamo risolvere

$$Ax = 0 \iff Ax = 0, x \neq 0$$

cioè vedere quando il $\ker(A)$ non è banale.

$$\exists x \neq 0: Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{matrix} x_1 = 0 \\ \lambda = 0 \end{matrix}$$

Quindi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ è un vettore di $\ker(A)$ se $\lambda = 0$

Quindi $\lambda = 0$ è l'unico valore per cui A è singolare

Potremmo anche guardare al rango e vedere che se dato il rango è nullo.

Anche con il determinante

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \alpha & & 1 \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^{n-1} \cdot (-1)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

3. L'inversa se esiste è unica. Possiamo avere degli "indizi" sulla forma di A^{-1} ?
Sì anche abbiamo visto che

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha^2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ è diagonale}$$

$\Rightarrow A^{-1}$ assomiglia per struttura a A^T

In particolare $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

In fatti

$$A A^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & & & 0^T & & 1 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \alpha & & & 0 \\ \hline & & & 1 & & 0^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & \frac{1}{\alpha} \\ & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & 0^T \\ \hline & & & & & \end{array} \right] = I$$

$$4. \quad \text{cond}(A, 2) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2, \quad \alpha \neq 0$$

$$\|A\|_2 = \max\{1, |\alpha|\}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{-T}A^{-1})}$$

$$A^{-T}A^{-1} = (AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\alpha^2} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-T}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\alpha^2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad \rho(A^{-T}A^{-1}) = \begin{cases} 1 & \alpha^2 \geq 1 \\ \frac{1}{\alpha^2} & \alpha^2 < 1 \end{cases}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \max\left\{1, \frac{1}{|\alpha|}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{cond}(A, 2) = \max\{1, |\alpha|\} \cdot \max\left\{1, \frac{1}{|\alpha|}\right\}$$

$$= \begin{cases} |\alpha| \cdot 1 = |\alpha| & |\alpha| \geq 1 \\ 1 \cdot \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|} & |\alpha| < 1 \end{cases}$$

si nota che per $\alpha = \pm 1 \Rightarrow \text{cond}(A) = 1$ cioè il

problema è perfettamente condizionato.

Per $|\alpha| \gg 1$ o $|\alpha| \ll 1$ abbiamo ottimi condizionamenti.

Ex 2.

$$A = \alpha I + uu^T$$

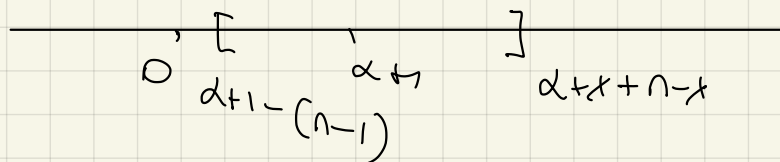
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & - & - & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & - & - & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

1. Conditioni suff. Possiamo usare Geršgorin?

$$K_1 = K_2 = \dots = K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (\alpha+1)| \leq n-1\}$$

Quanto all'0 $\notin \cup K_i = K_1$?

oss 1. A è simmetrica $\Rightarrow A$ ha autovalori reali



se $\begin{cases} \alpha+1 - (n-1) > 0 \\ \alpha > -1 \end{cases} \Rightarrow 0 \notin K_1$ e 0 non è autovalore.

$$\boxed{\alpha > n-2}$$

se $\alpha+1 < 0 \Rightarrow$



$$\alpha < -1$$

$$\alpha + n < 0$$

$$\boxed{\alpha < -n}$$

Quindi per $\alpha \geq n-2$ o $\alpha < -n$ almeno la matrice è invertibile. Ci sono altri valori? probabilmente sì perché queste sono condizioni solo sufficienti.
 b. Per trovare tutti i valori per cui A è invertibile occorre o calcolare $\lambda = \det A \neq 0$

$$\bullet \lambda_i \neq 0$$

$$\bullet \text{rank}(A) = n$$

$$\bullet \ker(A) = \{0\}$$

$\det A \dots$ la matrice è piena, troppo difficile

Esiste $x \neq 0$:

$$Ax = 0$$

$$(\alpha I + uu^T)x = \alpha x + u \cdot \underbrace{u^T x}_{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta u = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \beta u = 0 \Leftrightarrow \sum x_i = 0$$

$$\alpha \neq 0$$

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} u$$

Proviamo con gli autovalori. Come sono tutti gli autovalori di A ?

$$A = \alpha I + uu^T$$

$$\lambda_A = \alpha + \lambda_{uu^T}$$

Inoltre $\alpha \quad M = \alpha I + \beta B$

$$\lambda_M = \alpha + \beta \lambda_B$$

& $Bx = \lambda_B x \Rightarrow$

$$(\alpha I + \beta B)x = \alpha x + \beta \underbrace{Bx}_{\lambda_B x} = \alpha x + \beta \lambda_B x = \underbrace{(\alpha + \beta \lambda_B)}_{\lambda_M} x$$

in generale

$$M = \underline{a_0 I} + a_1 B + \dots + a_k B^k$$

ha come autovalori $\lambda_k = a_0 + a_1 \lambda_B + \dots + a_k \lambda_B^k$

Invece per $C = A + B$

in generale

$$\lambda_C \neq \lambda_A + \lambda_B$$

Autovalori di uu^T

Autovalori di una
matrice di rango 1

$$uu^T = \begin{bmatrix} 1 & - & - & - & 1 \\ | & & & & | \\ | & \backslash & & & | \\ | & & \backslash & & | \\ | & & & \backslash & | \\ 1 & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Quanto vale $\text{rango}(uu^T) = ?$

Le zuphe sono tutte uguali quindi:
 $\text{rang}(A) = 1 \Rightarrow$

$$\dim \ker A + \underbrace{\dim \text{Im}(A)}_{\text{rang}(A)} = n$$

$\Rightarrow \dim \ker(A) = n-1 \Rightarrow 0$ è autovettore
 questo ci dice che ci sono $n-1$ autovettori
 corrispondenti all'autovettore 0

$\tau(0) = n-1$ la molteplicità geometrica
 di $\lambda=0$ è $n-1$ - [Intuiti
 $\tau(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$
 per $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \tau(0) = \dim \ker A$

$\sigma(0)$ molteplicità algebrica?

Teo $\sigma \geq \tau$ molteplicità algebrica sempre
 maggiore o uguale alle molt. geom.

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0 \quad \lambda_n = ? \begin{cases} 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{traccia}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{traccia}(uu^T) = n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = n \Leftrightarrow \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0} + \lambda_n = n$$

La matrice di rango 1 uu^T ha $n-1$ autovalori nulli e 1 autovalore uguale a n

$$A = \alpha I + uu^T \begin{cases} \alpha + 0 & n-1 \text{ autovalori} \\ \alpha + n & 1 \text{ autovalore} \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ è invertibile $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ oppure $\alpha = -n$

B. $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} I + \gamma uu^T$

$$\left(\frac{1}{\alpha} I + \gamma uu^T \right) (\alpha I + uu^T) = I$$

$$\cancel{I} + \gamma \alpha uu^T + \frac{1}{\alpha} uu^T + \gamma \underbrace{uu^T uu^T}_n = \cancel{I}$$

$$\left(\gamma \alpha + \frac{1}{\alpha} + n \gamma \right) uu^T = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\gamma (\alpha + n) + \frac{1}{\alpha} = 0 \quad \begin{matrix} \alpha \neq -1 \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = - \frac{1}{\alpha (\alpha + n)}$$

a) $\text{cond}(A, \infty)$

$$\|A\|_{\infty} = \|\alpha I + uu^T\|_{\infty} = |\alpha+1| + (n-1)$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \left\| \frac{1}{\alpha} I - \gamma uu^T \right\|_{\infty} = \left| \frac{1}{\alpha} - \gamma \right| + |\gamma|(n-1) =$$

$$\text{poiché } \gamma = -\frac{1}{\alpha(\alpha+n)}$$

$$\frac{1}{\alpha} - \gamma = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} = \frac{\alpha+n+1}{\alpha(\alpha+n)}$$

$$\text{cond}(A) = (|\alpha+1| + (n-1)) \left(\frac{|\alpha+n+1|}{|\alpha(\alpha+n)|} + \frac{1}{|\alpha(\alpha+n)|} (n-1) \right)$$

Per capire quando la matrice risulta well conditioned
occorre studiare $\text{cond}(A)$ come funzione di α .

Si nota che per $|\alpha| \rightarrow \infty$ $\text{cond}(A) \rightarrow 1$
per $\alpha \rightarrow -n$ $\text{cond}(A) \rightarrow +\infty$
 $\alpha \rightarrow 0$ $\text{cond}(A) = +\infty$

Quindi la matrice è well conditioned
per $\alpha \rightarrow \infty$ e per $\alpha \rightarrow -n$