Esercizio 2. (20 punti) Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} n^2 & \text{se } i = j = 1 \\ -i & \text{se } i = j \geq 2 \\ -1 & \text{se } i = 1 \text{ e } j \geq 2 \\ -1 & \text{se } i \geq 2 \text{ e } j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio per $n = 4$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Si indichino con λ_i gli autovalori di A , con $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, sia $\rho(A) = |\lambda_1|$ e $\sigma(A) = |\lambda_n|$.

- Si dimostri che la matrice A è invertibile per ogni n .
- Si determinino tre costanti positive α, β e γ tali che $\alpha \leq \sigma(A) < \beta \leq \rho(A) \leq \gamma$.
- Sfruttando il punto (b) si dia una maggiorazione di $\mu_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.
- Sia $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice diagonale il cui i -esimo elemento principale sia i . Si consideri la matrice $B = D^{-1}AD$. Si dica quanti autovalori reali e distinti ha B .
- Per ogni $n \geq 3$ si dica che relazione c'è fra gli autovalori di A e di B ? La matrice A è diagonalizzabile? Sfruttando il punto (d) è possibile ottenere una approssimazione migliore di $\mu_2(A)$ rispetto a quella ottenuta al punto (c)?

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$ definita come

$$A = I_n + \alpha \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1^T + \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{u}^T, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = [0, 1, \dots, 1]^T,$$

per esempio per $n = 5$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si dimostri che la matrice risulta non singolare per $|\alpha| < 1$, mentre è singolare per $|\alpha| = 1$.
- Si dimostri che $\det(A) = 1 - \alpha^2$ e che quindi A risulta non singolare se e solo se $|\alpha| \neq 1$.
- Si dimostri che $\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$.
- Per $\alpha = 1$ si verifichi che $A^T A = I + \mathbf{e} \mathbf{e}^T + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_n^T + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1^T$ dove $\mathbf{e}$ è il vettore con tutte le componenti uguali a 1, cioè $\mathbf{e} = \mathbf{u} + \mathbf{e}_1$ e si dimostri che $\|A\|_2 \leq \sqrt{n+2}$.
- Si dimostri che la matrice ammette fattorizzazione LU per tutti i valori di α e si calcolino i fattori L e U .
- Si scriva una funzione Matlab che, presi in ingresso α e $\mathbf{b}$, con $|\alpha| \neq 1$, risolve il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizzando la fattorizzazione LU di A . Se ne valuti il costo computazionale e nel caso $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(100, 1)$ e $\alpha = 2$ si dica quanto vale il residuo $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty$.