

Sistemi lineari

$$Ax = b$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ha un'unica soluzione se e solo se

$$\det A \neq 0$$

Noi consideriamo le cose di sistemi in cui A è quadrato:

Se $\det A = 0$ le sistemi possono avere nessuna o infinite soluzioni:

$\begin{cases} \text{se } b \in \text{Im}\{A\} \Rightarrow \exists \text{ infinite soluzioni} \\ \text{se } b \notin \text{Im}\{A\} \Rightarrow \text{non esistono soluzioni} \end{cases}$

Ci sono alcuni casi in cui

• A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

NB

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

per tutte le matrici, non solo diagonali
infatti

(17)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow p(0) = \det(A)$$

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= (\lambda - \lambda_1)^{\sigma_1} (\lambda - \lambda_2)^{\sigma_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\sigma_k}$$

①

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$O(n)$ operazioni aritmetiche

② Metodo di Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice triangolare superiore

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo di sostituzione all'indietro

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{ii} \underline{x_i} + \boxed{a_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + a_{i,n} x_n} = b_i$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad i = n-1, \dots, 1$$

Costo: $n - i + 1$ moltiplicazioni al passo i -esim.

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(n-i+1)}_k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Metodo di sostituzione in avanti.

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad i = 2, \dots, n$$

Metodo di Gauss / Fattorizzazione LU

$$A^{(a)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(u)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(n)} = \begin{bmatrix} * & & \\ 0 & * & \\ & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & & \\ a_{1k}^{(u)} & * & \\ \vdots & & \\ a_{mk}^{(u)} & & * \end{bmatrix}$$

m, k colonne

$$A^{(u)} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & a_{kk}^{(u)} & * \\ 0 & a_{k+1,k}^{(u)} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,k}^{(u)} & * \end{bmatrix} \rightarrow A^{(u+1)} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & a_{kk}^{(u+1)} & * \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(u+1)} = a_{ij}^{(u)} - \frac{a_{ik}^{(u)}}{a_{kk}^{(u)}} a_{kj}^{(u)} \quad \begin{matrix} i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \end{matrix}$$

inoltre:

$$a_{ik}^{(u+1)} = a_{ik}^{(u)} - \frac{a_{ik}^{(u)}}{a_{kk}^{(u)}} \cdot a_{kk}^{(u)} = 0$$

Def A è fattorizzabile LU se $\exists$

L $\leftarrow$ triangolare inferiore con 1 sulla diagonale

U $\leftarrow$ triangolare superiore tali che

$$A = LU$$

$$\begin{matrix} Ax = b \\ \underbrace{LU}_{\substack{\uparrow \\ y}} x = b \end{matrix}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$AX = I \rightarrow Ax_i = e_i$$

4

$$[A^{(1)} | b^{(1)}] \rightarrow [A^{(2)} | b^{(2)}] \dots [A^{(n)} | b^{(n)}] = [U | y]$$

$$A^{(n+1)} = E^{(n)} A^{(n)}$$

$E^{(k)}$ è una matrice elementare di Gauss

$$E^{(k)} = I - \gamma^{(k)} e_k e_k^T \quad \left[\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{a-come} \\ \swarrow \end{array}$$

a comp $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{cu} \\ n+1 \\ \vdots \\ \text{in} \\ n \end{bmatrix}$

Hand-drawn diagram illustrating a transmission line model. A horizontal line represents the transmission line, with a '1' at the left end and a '0' at the right end. A vertical line segment is connected to the transmission line at a point labeled u^+ . Below this point, there is a dashed line leading to another point labeled u_n . An arrow points upwards from the text $u - csmo$ to the point u_n .

Lemma:

(1) $E^{(u)}$ invertierbar $\Rightarrow (E^{(u)})^{-1} = I + v^{(u)} e_u^T$

$$(I - U^{(u)} e_u^T) (I + U^{(u)} e_u^T) = I - \cancel{U^{(u)} e_u^T} + \cancel{U^{(u)} e_u^T} - \underbrace{U^{(u)} e_u^T U^{(u)} e_u^T}_{U^{(u)} H = 0} = I$$

② Se $x \in \mathbb{R}^n$, $\underbrace{x \neq 0}_{\text{scelto } k} \Rightarrow$ esiste una E di Gauss tale che

$$Ex = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = I - \sigma^{(k)} e_k^T$$

$$Ex = (I - \sigma^{(k)} e_k^T) x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ \sigma_n^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

/ x_k

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} - x_k \sigma_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n - x_k \sigma_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_i^{(k)} = \frac{x_i}{x_k}$$

③ $E_k E_h = I - \sigma^{(k)} e_k^T - \sigma^{(h)} e_h^T \quad k < h$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

/ k / h

2

En y il prodotto matrice vettore ha
costo $O(n-k)$

$$(I - \sigma^{(k)} e_k^T) y = y - \sigma^{(k)} \cdot y_k = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} - y_k \sigma_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ y_n - y_k \sigma_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(k+1)} = E^{(k)} A^{(k)}$$

$$\sigma_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & i \leq k \\ a_{ik}^{(k)} & i > k \end{cases}$$

$a_{kk}^{(k)}$ must always be $\neq 0$

$$U = A^{(n)} = E^{(n-1)} \cdots E^{(2)} E^{(1)} A^{(1)}$$

$$L = \left(E^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left(E^{(2)} \right)^{-1} \cdots \left(E^{(n-1)} \right)^{-1}$$

$$\boxed{A = LU}$$

Def. Una matrice A si dice a predominanza diagonale (p.d.) se è a p.d. per righe o per colonne e è a p.d. per righe e

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i=1 \dots n$$

e è a p.d. per colonne e

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad \forall j=1 \dots n$$

es:

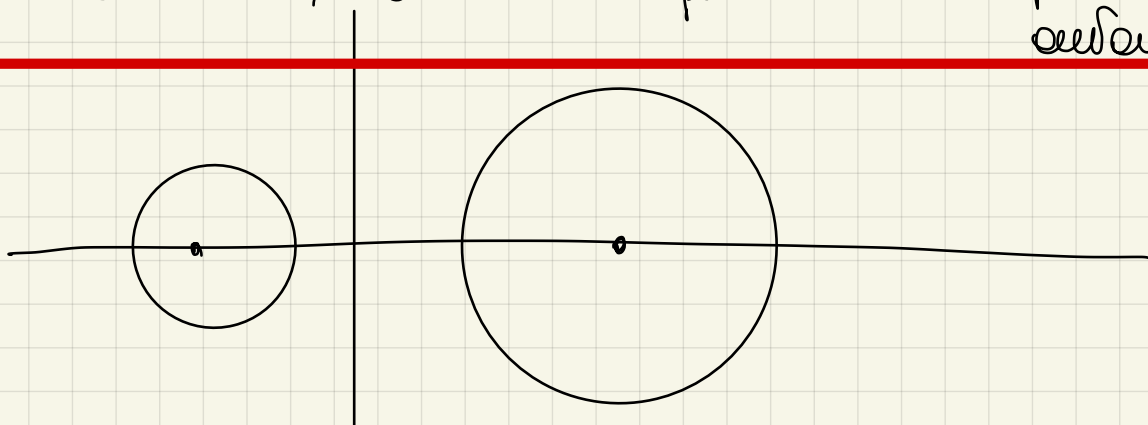
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$5 > 3 \quad \checkmark$$

$$3 > 1 \quad \checkmark$$

$$10 > 8 \quad \checkmark$$

Le matrici a predominanza diagonale sono invertibili poiché $0 \notin \cup K_i \Rightarrow$ per G. non può essere annullata.



Matrici elementari di Gauss

$$E_n = I - v^{(u)} e_n^+$$

$$v^{(u)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{u+1}^{(u)} \\ \vdots \\ v_n^{(u)} \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{u+1}^{(u)} \\ \vdots \\ v_n^{(u)} \end{bmatrix}} \right\} \text{a componenti}$$

① $E_k^{-1} = I + v^{(k)} e_k^T$ e' sempre una m.e. di Gauss

② $E_k X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_k \neq 0$ $v^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{x_{k+1}}{x_k} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_k} \end{pmatrix}$

③ $E_n \cdot E_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\omega_{hh}^{(k)} & \omega_{hk}^{(k)} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & -\omega_{hn}^{(k)} & \omega_{nk}^{(k)} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$h < k$

$A = A^{(1)} \rightarrow A^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(n)} = 0$

$A^{(k)} = \begin{bmatrix} * & & \\ 0 & \begin{matrix} a_{kk}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(k)} \end{matrix} & * \end{bmatrix}$

$A^{(k+1)} = E_k A^{(k)}$

moltiplicazione di Gauss

$v_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

$v^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} \\ \hline a_{kk}^{(k)} \end{pmatrix}$ ← pivot

$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - v_i^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k)}$ $i, j > k$

$$\sum_{k=1}^{n-1} O(n-k)^2 = O(n^3) \quad \text{operazioni floating point}$$

$$U = A^{(n)} = E^{(n-1)} A^{(n-1)} = E^{(n-1)} E^{(n-2)} A^{(n-2)} = \dots = \underbrace{E^{(n-1)} E^{(n-2)} \dots E^{(1)}}_{L^{-1}} A$$

$$L = (E^{(n-1)} E^{(n-2)} \dots E^{(1)})^{-1} = E^{(1)-1} E^{(2)-1} \dots E^{(n-1)-1}$$

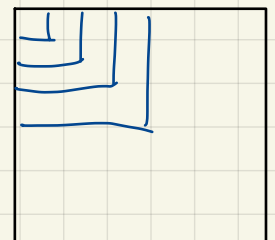
$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & & \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & & \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \dots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Possibile problema: uno dei pivot $a_{kk}^{(k)} = 0$
 nel caso la matrice non è fattorizzabile LU
 e il procedimento di G. non termina.

Teorema di esistenza ed unicità delle fatt. LU

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e le sotto-matrici principali di
 testo $A_k = A(1:k, 1:k)$ con $k=1, \dots, n-1$

sono invertibili $\Rightarrow \exists$ ed è unica la
 fatt. LU di A



es:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & \boxed{5} & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = 1 \neq 0$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

Dimo. si dimostra per induzione su n .

Caso base

$$\boxed{n=1}$$

$$A = [a_{11}] = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

" "
 L U

Supponiamo che il teorema sia vero per matrici di dimensione fino a $n-1$.

Dimostriamo che il teo vale per dim. n .

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & y \\ \hline x^T & a_{nn} \end{array} \right]$$

se A è invert. LU $\Rightarrow \exists$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ω^T 1

$$U = \begin{bmatrix} & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta \end{bmatrix}$$

0^T U_{n-1} z

in particolare

$$\begin{cases} A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1} + \cancel{\omega \omega^T} \\ x^T = \omega^T U_{n-1} + \cancel{1 \cdot \omega^T} \\ y = L_{n-1} z + \cancel{\omega \beta} \\ a_{nn} = \omega^T z + \beta \end{cases}$$

ho un sistema di equazioni nelle incognite

$$L_{n-1}, U_{n-1}, \omega, z, \beta$$

A_{n-1} è poss. LU per ipotesi induttive infel.
 è dim. $n-1$ e i suoi minori principali di
 teste di ordine $1, \dots, n-2$ sono invertibili (x ipotesi
 del teorema)

$$x^T = w^T U_{n-1} \Leftrightarrow U_{n-1}^T w = x$$

$$\begin{cases} (AB)^T = B^T A^T \\ (Ax)^T = x^T A^T \end{cases}$$

$$0 \neq \det U_{n-1} = \det A_{n-1} \text{ perché } \det L_{n-1} = 1$$

quindi w esiste unico

$$L_{n-1} z = y \quad \checkmark \text{ perché } z = L_{n-1}^{-1} y \text{ e } \det L_{n-1} = 1$$

$$\beta = a_{nn} - w^T z \text{ è unico!}$$

esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_k = 1 \quad \forall k = 1 \dots n-1$$

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_{n-1} \cdot A_{n-1}$$

$$\parallel U_{n-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ w^T & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & 2 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -1 & 1 \\ & & & 1 & \beta \\ 0^T & & & & \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = L_{n-1} z \quad \Rightarrow \quad z = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(10 \dots 0) = \omega^T \cdot U_{n-1}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 1$$

$$-\omega_1 + \omega_2 = 0 \quad \omega_2 = \omega_1 = 1$$

$$-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = 0 \quad \omega_3 = 2$$

$$-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 = 0$$

$$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\omega_4 = 4 = 2^2$$

$$\omega_5 = 8 = 2^3$$

$$\omega_6 =$$

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k$$

Dimostrare per induzione che $\omega_i = 2^{i-2} \quad i \geq 2$

$$\beta = 1 - \omega^T z$$

$$= 1 - (1 \ 1 \ 2 \ 2^2 \dots 2^{n-3}) \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

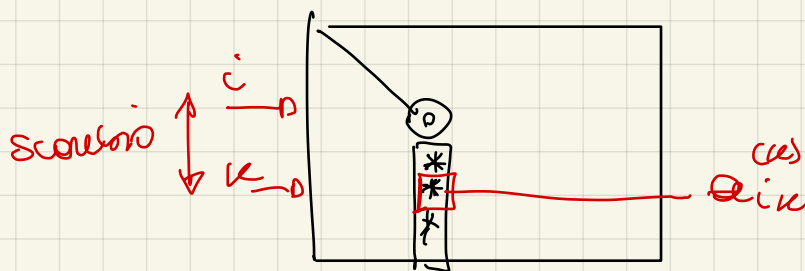
$$= 1 + \left(1 + \sum_{i=0}^{n-3} 2^i \right) = 2 + \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} = 1 + 2^{n-2}$$

OSS:

$a_{nn}^{(u)} = 0$ si usa una tecnica di pruning

si cerca un indice i tale che

$$a_{ik}^{(u)} \neq 0 \quad \text{con } i > k$$



$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrice di permutazione
 ottenuto dall'identità scambiando
 delle righe

Data A esiste sempre una P tale che
 PA è fatt. LU

Tecniche di pivoting:

$$|a_{ik}^{(u)}| = \max_{j=k, \dots, n} |a_{ij}^{(u)}|$$

scambio della riga i e la riga k
 serve per rendere stabile il metodo di G.

Se P è la matrice di permutazione che scambia
 le righe. Durante il procedimento di Gauss
 si dimostra che

$$PA = LU$$

$$A = \underbrace{P^T L U}_{\text{non è triangolare}}$$

Tecniche di pivoting per aumentare la stabilità numerica

Dalla analisi della stabilità del metodo di G.

Teo. Supponiamo che $\tilde{L}$ e $\tilde{U}$ sono i fattori effettivamente calcolati

$$\Rightarrow \exists E: \quad \tilde{L} \tilde{U} = A + E \quad \text{corrisponde alla perturbazione di una matrice}$$

$$\text{f.c. } \|E\| = O(u) \cdot \|L\| \cdot \|U\|$$

devo fare in modo che $\|L\|$ e $\|U\|$ siano piccole

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \quad i > j$$

Per evitare che $\|L\|$ cresca è sufficiente porre in modo che

$$|m_{ij}| \leq 1$$

questo si realizza scegliendo come "pivot" l'elemento di massimo modulo nella colonna corrente e facendo lo scambio delle righe con.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{swap}} P_0 A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{1}{3}$$

$$m_{31} = -\frac{2}{3}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(0)} = E^{(0)} \cdot P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{14}{3} + 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = I$$

$$m_{32} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} < 1$$

$$E^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Tecnica di massimo pivot

$$U = A^{(n-1)}$$

$$|u_{ij}| \leq 2^n \cdot \max_{i,j=1..n} |a_{ij}|$$

$$-\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$[L, U] = LU(A)$$

non è detto che L sia triangolare

(PL)

implementa la tecnica del massimo pivot

FILL-IN

$$A = \begin{bmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & & \\ 0 & & * \\ & * & \end{bmatrix}$$

con un passo si riempie!

Metodi iterativi per equazioni LINEARI $Ax=b$

Per matrici di grandi dimensioni, o per evitare il full-in

$$A = M - N, \quad M \text{ invertibile}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx - Nx = b$$

$$\Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = \underbrace{M^{-1}N}_P x + \underbrace{M^{-1}b}_q$$

P matrice di iterazione

$$x = Px + q \quad \& \quad \text{systeme equivalente!}$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$$

Teorema: se $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e si è $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$. Allora
se $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ allora $x^* = Px^* + q$ cioè x^* è
soluzione di $Ax=b$

Dim

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g(x) = Px + q \quad \text{è continua}$$

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^{(k)}) \underset{g \text{ è continua}}{=} g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}\right) = g(x^*) = Px^* + q$$

esempio:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q = M^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$$

$$x^{(u+1)} = Px^{(u)} + q$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = Px^{(0)} + q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Px^{(1)} + q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} + q = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{9}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Ax^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{9}{2} \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In generale non avendo convergenza in un numero finito di passi ma convergenza al limite

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si ottiene una successione divergente

me le unite è lo stesso

Def: Un metodo iterativo è convergente se tutte le successioni generate a partire da un qualsiasi $x^{(0)}$ sono convergenti

NB: Esistono metodi (P, q) oppure (M, N, b) per i quali no successioni sia convergenti de non convergenti $\Rightarrow$ questi metodi non sono convergenti.

esempio

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = P x^{(0)} + q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = P x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \dots x^{(n)} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{da } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(n)} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = P x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = P x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ infatti } \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ infatti } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esercizio:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

fare vedere che esistono due
 $x^{(0)}$ tali che $\begin{cases} x^{(u)} \rightarrow \text{converge } x^* \\ x^{(u)} \rightarrow \text{diverge} \end{cases}$

Teorema condizioni sufficienti per la convergenza

Condizione sufficiente affinché un metodo iterativo
sia convergente è che esista una norma matriciale
indotta: $\|P\| < 1$ (se $\|P\| < 1 \Rightarrow$ convergo)

esempio $P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|P\|_\infty = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ convergo

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \|P\|_\infty = 1$ non posso applicare il teo

Dim.: Dire che $x^{(u)} \rightarrow x$ soluzione di $x = Px + q$
equivale a dire che

$\lim_{u \rightarrow \infty} \underbrace{x^{(u)} - x}_{e^{(u)}} = 0$ $\underbrace{e^{(u)}}_{\text{vettore dell'errore al passo } u\text{-esimo}}$ $\rightarrow$ vettore

$$\begin{aligned} e^{(u+1)} &= x^{(u+1)} - x = \underbrace{Px^{(u)} + q}_{x^{(u+1)}} - \underbrace{(Px + q)}_x = P(x^{(u)} - x) = Pe^{(u)} \\ &= P \cdot Pe^{(u-1)} = P \cdot P \cdot Pe^{(u-2)} = \dots = P^{u+1} e^{(0)} \end{aligned}$$

$\|e^{(u+1)}\| = \|P^{u+1} e^{(0)}\| \leq \underbrace{\|P^{u+1}\|}_P \cdot \|e^{(0)}\| \leq \|P\|^{u+1} \cdot \|e^{(0)}\|$

$\nearrow$ $\nearrow$
norme $\nearrow$ compatibilità tra $\nearrow$ prop. 4 delle
vettoriale e matriciale indotte

$$0 \leq \|e^{(k+1)}\| \leq \underbrace{\|P\|^{k+1}}_{\substack{0 < \|P\| < 1}} \cdot \|e^{(0)}\|$$

per il teo del confronto $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k+1)}\| = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

Teorema condizioni necessarie

condizione necessaria affinché un metodo sia convergente è che $\rho(P) < 1$ (se il metodo converge $\Rightarrow \rho(P) < 1$)

oss: L'uso del teorema è il seguente se $\rho(P) \geq 1 \Rightarrow$ il metodo non converge

Dim: Supponiamo per assurdo che il metodo sia convergente ma che esista λ autovettore di P tale $|\lambda| \geq 1$.

se il metodo è convergente allora converge per ogni scelta di $x^{(0)}$.

$$x^{(0)} = \underbrace{x + v}_P \quad \text{autovettore corrispondente a } \lambda$$

$$Pv = \lambda v, \quad v \neq 0$$

$$e^{(k)} = P^k e^{(0)} = P^k (x^{(0)} - x) = P^k v = \lambda^k v$$

$\uparrow$ v è autovettore

Poiché il metodo è convergente

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n)}$$

ma

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{(n)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^n v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda|^n \|v\|$$

$\downarrow$
 $+\infty$

assurdo quindi $|\lambda| < 1$

Teorema: Un metodo è convergente $\Leftrightarrow \rho(P) < 1$

Dimo: $\Leftarrow$ Solo nel caso P diagonalizzabile.

Se P è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists V$ invertibile e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

tale che $P = V D V^{-1}$ e $|\lambda_i| < 1$

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = P x^{(k)} - P x = P(x^{(k)} - x) = \dots = P^{k+1} e^{(0)}$$

$$P^{k+1} = V D^{k+1} V^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{(k+1)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|V D^{k+1} V^{-1}\|$$

$$D^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

per $n \rightarrow \infty$ poiché $|\lambda_i| < 1$

abbiamo che $D^{k+1} \rightarrow 0$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{(k+1)}\| = \|V \left(\lim_{n \rightarrow \infty} D^{k+1} \right) V^{-1}\| = 0$$

$\downarrow$
 0

Criteri d'arresto

$$x^{(u+1)} = P x^{(u)} + q$$

come scopro se la mia iterata $x^{(u)}$ è vicina alla soluzione?

① Residuo

$$\|b - A x^{(u)}\| \leq \text{tol} \quad \left(\frac{\|b - A x^{(u)}\|}{\|x^{(u)}\|} \leq \text{tol} \right)$$

residuo relativo

② Distanza tra due iterati successive

$$\|x^{(u+1)} - x^{(u)}\| \leq \text{tol}$$

③ Distanza relativa

$$\frac{\|x^{(u+1)} - x^{(u)}\|}{\|x^{(u)}\|} \leq \text{tol}$$

Il fatto di essersi arrestati al passo u -esimo può essere $\|b - A x^{(u)}\| \leq \text{tol}$ mi assicura che
"approssimato bene" x ? cioè $\|x^{(u)} - x\| \leq \text{tol}$?

No perché posso ancora essere lontano dalla
soluzione cioè $\|e^{(u)}\| \gg \text{tol}$

$$x^{(u+1)} - x^{(u)} = \underbrace{x^{(u+1)}}_{e^{(u+1)}} - \underbrace{x^{(u)}}_{e^{(u)}} = e^{(u+1)} - e^{(u)}$$

$$\left(\begin{array}{l} e^{(u+1)} = P e^{(u)} \\ x^{(u+1)} - x = P x^{(u)} + q - (P x + q) = P x^{(u)} - P x = P(e^u) \\ x^{(u+1)} - x^{(u)} = \underbrace{(P - I)}_{\substack{\text{poiché } \rho(P) < 1 \quad P - I \text{ è invertibile} \\ \text{infatti: } \lambda(P - I) = \lambda(P) - 1 \\ \lambda(P) \neq 1 \\ \lambda(P - I) \neq 0 \Rightarrow P - I \text{ è invertibile}}} e^u \end{array} \right.$$

$$e^{(u)} = (P - I)^{-1} (x^{(u+1)} - x^{(u)})$$

$$\|e^{(u)}\| = \|(P - I)^{-1}\| \|x^{(u+1)} - x^{(u)}\| \leq \|(P - I)^{-1}\| \cdot \|x^{(u+1)} - x^{(u)}\| \leq \text{tol} \|(P - I)^{-1}\|$$

$$\text{se } \|(P - I)^{-1}\| \text{ è "piccola"} \Rightarrow \|e^{(u)}\| < \alpha(\text{tol})$$

& si fa il discorso con le zenden

$$\|x^{(u)} - x\| \leq \text{tol} \|A^{-1}\|$$

Compte del 7/7/2022

$$A_{ij} = \begin{cases} i & \text{se } i < j \\ j & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

$n=5$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 2 & & & 2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}$$

a) LU

b) $\|A\|_2 = \|L\|_2 \cdot \|U\|_2$

c) Studiare il comportamento del metodo di G-S

$$M = \text{tril}(A) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & 1 & 2 & \\ & & & 1 & 2 \\ 1 & 2 & & & n \end{bmatrix}$$

$$N = -\text{triu}(A, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & n-1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = M^{-1}N =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & 1 & 2 & \\ & & & 1 & 2 \\ 1 & 2 & & & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 + 2x = 0 \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$m_{i,:} = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ i, 0 \dots 0]$$

$$S_{j,j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{j} \\ \vdots \\ -\frac{1}{(j+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} j-1 \\ \leftarrow j \\ \leftarrow j+1 \end{matrix}$$

$$i=j \quad [1 \ 2 \ \dots \ j \ 0 \dots 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{j} \\ \vdots \\ -\frac{1}{(j+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} j-1 > 1$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{3} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -\frac{1}{n-1} \\ & & & & & & \frac{1}{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & & 1 & \dots & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & n-1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

$-\frac{1}{2} + 1$

$$\lambda_G \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\}$$

$$\rho(G) = \frac{n-1}{n} < 1 \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ GS. è convergente.

d) function $x_{\text{new}} = \text{GS step}(b, x^{\text{old}})$

$$x_i^{\text{new}} = \frac{1}{i} \left(b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} j x_j^{\text{new}}}_{\text{somme 1}} - i \left(\sum_{j=i+1}^n x_j^{\text{old}} \right) \right)$$

$i=1 \dots n$

somme 2 = $\sum_{j=2}^n x_j^{\text{old}}$

somme 1 = 0

for $i=1:n$

 somme 1 =

 somme 2 =

$$x_{(i)}^{\text{new}} = (b(i) - \text{somme 1} - i * \text{somme 2}) / i$$

$$x_{i+1}^{\text{new}} = \frac{1}{i+1} \left(b_{i+1} - \sum_{j=1}^i j x_j^{\text{new}} - \sum_{j=i+2}^n (i+1) x_j^{\text{old}} \right)$$

n

$$\begin{array}{l}
 A = \left[\begin{array}{c|c} \text{triangle} & \text{xxxxxt} \end{array} \right] \\
 M = \left[\text{triangle} \right] \\
 N = \left[\begin{array}{c} \text{rectangle} \\ 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \end{array} \right\} \\
 G = M^{-1}N = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$M G = N$$

$$M G_{:,n} = N_{:,n}$$