

Esercizio 2. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1; \\ 2 & \text{se } i = j > 1; \\ 1 & \text{se } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si determini la matrice $A^{(1)}$ ottenuta dopo il primo passo del metodo di eliminazione gaussiana applicato ad A . Si mostri che A ammette fattorizzazione LU e si determinino i fattori L e U con $A = L \cdot U$.
2. Sia $\mathcal{K}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ il numero di condizionamento di A in norma infinito. Si mostri che $\mathcal{K}_\infty(A) \leq \mathcal{K}_\infty(L)\mathcal{K}_\infty(U)$. Si determini $\mathcal{K}_\infty(L)$ e $\mathcal{K}_\infty(U)$ e si deduca che $\mathcal{K}_\infty(A) \leq 4n^2$.
3. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ risolve il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ calcolando $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e restituendo in uscita il vettore $\mathbf{x}$. Se ne valuti il costo computazionale.

o se sono stati effettuati più di 100 passi.

Esercizio 2. Siano α e β due parametri reali e sia $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ la matrice definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j, i = 1, \dots, 2n \\ \beta & \text{se } j = 2n - i + 1, i = 1, \dots, 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere (dimostrando il risultato o viceversa producendo un controesempio)
 - a) La matrice A ha sempre autovalori reali
 - b) La matrice A è sempre invertibile
2. Si dimostri che se $\alpha \neq 0$ il procedimento di eliminazione di Gauss può essere portato a termine senza scambio di righe e si fornisca la matrice ridotta in forma triangolare superiore U . Cosa si può dire per $\alpha = 0$?
3. Si calcoli in funzione di α e β il $\det(A)$.
4. Si scriva una funzione Matlab di costo lineare per la risoluzione del sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ che tenga conto della particolare struttura della matrice U . La funzione prende in ingresso il vettore $\mathbf{b}$ ed i parametri α e β .

Esercizio Sia $g = [\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ e sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ -1/2 & \text{se } j - i = 1; \\ \gamma_j & \text{se } i = n \text{ e } j < n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si dimostri che se $|\gamma_j| < 1/2$, $1 \leq j \leq n-1$, allora A è invertibile.
2. Si dimostri che A ammette fattorizzazione LU per ogni valore di γ_j con $1 \leq j \leq n-1$.
3. Si determini il fattore triangolare L ed il fattore triangolare U della fattorizzazione LU di A .
4. Si mostri che $\det(A) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n} \gamma_j$.
5. Si dimostri che se $|\gamma_j| < 1/2$, $1 \leq j \leq n-1$, allora il calcolo del determinante è ben condizionato.
6. Si scriva una funzione ~~Python~~^{MATLAB} `def mat_prod(g, b):` che dati in ingresso il vettore $g = [\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}]^T$ dei coefficienti ed il vettore $\mathbf{b}$ restituisca in uscita il vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{b}$ calcolato con costo lineare senza la memorizzazione esplicita della matrice.

Esercizio 2. Sia $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1; \\ -1 & \text{se } i = j + 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ottiene

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si scriva una funzione Matlab di costo lineare che dato in input n restituisce la matrice A_n .
2. Si dica se il metodo di Gauss può essere applicato senza scambi di riga ad A_n e nel caso si determini la matrice triangolare superiore.
3. Si mostri che A_n è invertibile e si determini $\det(A_n)$.
4. Utilizzando il comando `cond` in Matlab si analizzi sperimentalmente il condizionamento $\mathcal{K}_\infty(A_n)$ in norma infinito della matrice A_n riportando il valore del rapporti $\frac{\mathcal{K}_\infty(A_n)}{\det(A_n)}$ e $\frac{\mathcal{K}_\infty(A_n)}{n^2}$ per $n \in \{100, 200, 400, 800\}$.