Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
Marzo 2019

Si ricorda che le funzioni Matlab richieste negli esercizi devono essere trascritte sui fogli consegnati poiché non sarà scaricato alcun file Matlab dai computer sui quali operate.

Esercizio 1. Sia $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

a) Si studi il condizionamento del calcolo di f(x)

b) Si studi la stabilità del calcolo di $f(x)$ e la si confronti con la stabilità dell'algoritmo che calcola la funzione come $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ definita come

$$A = I_n + \alpha \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_1^T + \alpha \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{u}^T, \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} = [0, 1, \dots, 1]^T,$$

per esempio per $n = 5$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si dimostri che la matrice risulta non singolare per $|\alpha| < 1$, mentre è singolare per $|\alpha| = 1$.

b) Si dimostri che $\det(A) = 1 - \alpha^2$ e che quindi A risulta non singolare se e solo se $|\alpha| \neq 1$.

c) Si dimostri che $\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$.

d) Per $\alpha = 1$ si verifichi che $A^T A = I + \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T + \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_n^T + \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_1^T$ dove $\boldsymbol{e}$ è il vettore con tutte le componenti uguali a 1, cioè $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}_1$ e si dimostri che $\|A\|_2 \leq \sqrt{n+2}$.

e) Si dimostri che la matrice ammette fattorizzazione LU per tutti i valori di α e si calcolino i fattori L e U.

f) Si scriva una funzione Matlab che, presi in ingresso α e $\boldsymbol{b}$, con $|\alpha| \neq 1$, risolve il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ utilizzando la fattorizzazione LU di A. Se ne valuti il costo computazionale e nel caso $b = ones(100, 1)$ e $\alpha = 2$ si dica quanto vale il residuo $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_\infty$.