Esercizio 2. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j = 1; \\ 2 \text{ se } i = j > 1; \\ 1 \text{ se } j = i+1 \text{ } o \text{ } j = i-1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si determini la matrice $A^{(1)}$ ottenuta dopo il primo passo del metodo di eliminazione gaussiana applicato ad A. Si mostri che A ammette fattorizzazione LU e si determinino i fattori L e U con $A = L \cdot U$.
2. Sia $\mathcal{K}_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty$ il numero di condizionamento di A in norma infinito. Si mostri che $\mathcal{K}_\infty(A) \leq \mathcal{K}_\infty(L)\mathcal{K}_\infty(U)$. Si determini $\mathcal{K}_\infty(L)$ e $\mathcal{K}_\infty(U)$ e si deduca che $\mathcal{K}_\infty(A) \leq 4n^2$.
3. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ risolve il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ calcolando $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ e $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ e restituendo in uscita il vettore $\boldsymbol{x}$. Se ne valuti il costo computazionale.

$$A_n^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se applichiamo un passo di Gauss corrispondente $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ si ottiene

$$A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \boxed{A_{n-1}^{(0)}} \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi innescare un procedimento induttivo sulla dimensione n, dicendo che ad ogni passo k

$$A_n^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ \hline & & & & A^{(0)}_{n-k} \end{array}\right]$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad\quad}_{n-k}$$

possiamo applicare un passo di Gauss alla matrice $A^{(0)}_{n-k}$.

Si ottiene $\quad U = A_n^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

Nella matrice L trovano i moltiplicatori che sono non nulli solo per gli elementi sotto diagonali dove valgono 1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La fatt. è unica perché i minori di U sono tutti det 1.

(2) $\quad K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|$

$A = LU \qquad \|A\|_\infty \le \|L\|_\infty \|U\|_\infty$

$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} \qquad \|A^{-1}\|_\infty \le \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|_\infty$

$$\Rightarrow K_\infty(A) \le K_\infty(L)\, K_\infty(U)$$

$$\|A\|_\infty = 4$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -1 & \ddots & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{n-1} & \cdots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|L^{-1}\|_\infty = n \qquad U^{-1} = (L^T)^{-1} = (L^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty \le n^2$$

$$\Rightarrow K_\infty(A) \le 4n^2$$

c)

$$Ax = b$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & y_1 = b_1 \\ & y_1 + y_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - y_1 \\ & \vdots \\ & y_{k-1} + y_k = b_k \Rightarrow y_k = b_k - y_{k-1} \end{aligned}$$

$$x_n = y_n$$

$$x_{n-1} + x_n = y_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = y_{n-1} - x_n$$

$$\vdots$$

$$x_k + x_{k+1} = y_k \Rightarrow x_k = y_k - x_{k+1}$$

```
function x = sys-solve(b)
  n = lenght(b);
  x = zeros(n,1);
  y = zeros(n,1);

  y(1) = b(1)
  for i = 2:n
      y(i) = b(i) - y(i-1);
  end
  x(n) = y(n);
  for i = n-1 : -1 : 1
      x(i) = y(i) - x(i+1);
  end
```

Il costo di questa funzione è lineare in n.

Esercizio Sia $g = [\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ e sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j; \\ -1/2 \text{ se } j - i = 1; \\ \gamma_j \text{ se } i = n \text{ e } j < n; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si dimostri che se $|\gamma_j| < 1/2$, $1 \le j \le n-1$, allora A è invertibile.
2. Si dimostri che A ammette fattorizzazione LU per ogni valore di γ_j con $1 \le j \le n-1$.
3. Si determini il fattore triangolare L ed il fattore triangolare U della fattorizzazione LU di A.
4. Si mostri che $\det(A) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n}\gamma_j$.
5. Si dimostri che se $|\gamma_j| < 1/2$, $1 \le j \le n-1$, allora il calcolo del determinante è ben condizionato.
6. Si scriva una funzione ~~Python~~ MATLAB `def mat_prod(g, b):` che dati in ingresso il vettore $g = [\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}]^T$ dei coefficienti ed il vettore $\mathbf{b}$ restituisca in uscita il vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{b}$ calcolato con costo lineare senza la memorizzazione esplicita della matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -\frac{1}{2} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

(1) se A è a pred. diagonale $\Rightarrow$ A è invertibile

se $|\gamma_j| < \frac{1}{2}$ la matrice è a pred. diagonale per colonna. Infatti $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$ $j = 1 \ldots n$

col 1 $|1| > |\gamma_1|$ se $|\gamma_1| < \frac{1}{2} \Rightarrow |\gamma_1| < 1$ ✓

col k $|1| > |-\frac{1}{2}| + |\gamma_k|$ se $|\gamma_k| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + |\gamma_k| < 1$
$k = 2 \ldots n-1$

col n $1 > |-\frac{1}{2}|$

(2) Poiché $A(1:k,1:k) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\frac{1}{k} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ e $\det(A(1:k,1:k)) = 1$

$k = 1 \dots n-1$

allora i minori principali di testa di A sono tutti non singolari $\Rightarrow$ A è fatt. LU in modo unico per ogni γ_i

(3) Per determinare i fatt. LU si può utilizzare il metodo a blocchi, dal momento che

L_{n-1} e U_{n-1} si possono direttamente calcolare poiché $A(1:n-1,1:n-1)$ è triangolare superiore.

$L_{n-1} = I_{n-1}$ e $U_{n-1} = A(1:n-1,1:n-1)$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \\ \hline \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = I_{n-1} y \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}]}_{g^T} = x^T U_{n-1} \Leftrightarrow U_{n-1}^T x = g$$

Risolvendo

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & \ddots & \\ & \ddots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}$$ si ottiene

$$x_1 = \gamma_1$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = \gamma_2 \Rightarrow \quad x_2 = \gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_1$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{2}x_{k-1} + x_k = \gamma_k \Rightarrow x_k = \gamma_k + \frac{1}{2}x_{k-1}$$

con un ragionamento induttivo abbiamo che

$$x_k = \gamma_k + \frac{1}{2}\gamma_{k-1} + \frac{1}{4}\gamma_{k-2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\gamma_1 = \sum_{j=1}^{k} 2^{j-k}\gamma_j$$

$$-\underbrace{x^T y}_{=-\frac{1}{2}x_{n-1}} + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n+1}\gamma_j = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n}\gamma_j$$

(4)

$$\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot \beta = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n}\gamma_j$$

(5) $$f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n}\gamma_j$$

$$\varepsilon_{in} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i}{f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})} \frac{\partial f}{\partial \gamma_i} \varepsilon_{\gamma_i} =$$

$$= \frac{1}{f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \cdot 2^{i-n} \varepsilon_{\gamma_i}$$

$$|\varepsilon_{in}| \le \frac{1}{|f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})|} \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-n} |\gamma_i| |\varepsilon_{\gamma_i}| \le$$

$$\underset{\substack{|\gamma_i| < \frac{1}{2} \\ |\varepsilon_{\gamma_i}| < u}}{\le} \frac{1}{|f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})|} \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-n} \frac{1}{2} \cdot u \le \frac{u}{f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-i}}$$

$$= \frac{u}{|f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})|} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{u}{|f(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})|}$$

Occorre maggiorare

$$f(\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-i}} \gamma_i\right) \underset{\gamma_i > -\frac{1}{2}}{>} 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-i}} =$$

$$= 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 1 - \left(2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \frac{3}{2} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

Quindi se $|\gamma_j| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ per $n \geq 2$

$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{in}| \leq 4u$

Quindi la formula è ben condizionata

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\frac{1}{2} \\ & g^T & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - \frac{1}{2} b_2 \\ b_2 - \frac{1}{2} b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} - \frac{1}{2} b_n \\ \sum_{i=1}^{n-1} b_i \gamma_i + b_n \end{bmatrix} = y$$

```
function   y = mat_prod(g, b)
  n = lenght(b);
  y = zeros(n, 1)
  for i = 1:n-1
     y(i) = b(i) - 1/2 * b(i+1);
  end
  somma = 0
  for i = 1:n-1
     somma = somma + b(i) * g(i);
  end
     y(n) = somma + b(n);
  end
```

o se sono stati effettuati più di 100 passi.

Esercizio 2. Siano α e β due parametri reali e sia $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ la matrice definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j,\ i = 1, \dots, 2n \\ \beta & \text{se } j = 2n - i + 1,\ i = 1, \dots, 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere (dimostrando il risultato o viceversa producendo un controesempio)
   a) La matrice A ha sempre autovalori reali
   b) La matrice A è sempre invertibile
2. Si dimostri che se $\alpha \neq 0$ il procedimento di eliminazione di Gauss può essere portato a termine senza scambio di righe e si fornisca la matrice ridotta in forma triangolare superiore U. Cosa si può dire per $\alpha = 0$?
3. Si calcoli in funzione di α e β il $\det(A)$.
4. Si scriva una funzione Matlab di costo lineare per la risoluzione del sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ che tenga conto della particolare struttura della matrice U. La funzione prende in ingresso il vettore $\mathbf{b}$ ed i parametri α e β.

1.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \alpha & \beta & & \\ \hline & & \beta & \alpha & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \beta & & & & & \alpha \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n \end{array}$$

a) VERO, A è simmetrica e quindi ha autovalori reali per ogni valore di α e β

b) FALSO. La matrice non risulta ad esempio invertibile per $\alpha = \beta$, poiché le righe non sono linearmente indipendenti. Ad esempio per $\alpha = \beta$ la riga 1 è uguale alla riga 2n

2) Possiamo provare ad applicare un passo di

Gauss. Continuando $R_{2n} \leftarrow R_{2n} - \frac{\beta}{\alpha} R_1$

$$A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \cdot & \\ & & \alpha & \beta & & \\ & & \beta & \alpha & & \\ & \cdot & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ & A_{n-1}^{(0)} & \\ 0 & \cdots & \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Quindi con un ragionamento induttivo si verifica che bastano n passi di Gauss e si ottiene

$$A_n^{(n-1)} = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \cdot & \\ & & \alpha & \beta & & \\ & & 0 & \alpha - \beta^2/\alpha & & \\ & \cdot & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \end{bmatrix} = U$$

Per $\alpha = 0$ abbiamo che

$$A = \begin{bmatrix} & & \beta \\ & \cdot & \\ \beta & & \end{bmatrix}$$

In questo caso non è possibile applicare Gauss senza scambi di righe perché tutti i pivot sono nulli. Se per assurdo fosse possibile ottenere una fatt. LU: $A = LU$

$$L^{-1} A = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \beta \\ & \cdot & \\ \beta & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \qquad \ell(2n, 1:2n)\, A(:,1) = U_{2n,1} = 0$$

ma $\ell(2n, 1:2n)\, A(:,1) = \beta$. Quindi se $A \neq 0$, nel caso $\alpha = 0$ non può essere applicato Gauss.

se $\alpha \neq 0$

(3) $\det A = \det U = \alpha^n \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \right)^n = (\alpha^2 - \beta^2)^n$

se $\alpha = 0$ per costruzione $\det A = (-1)^n \beta^{2n}$

(4) $Ux = b$

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \alpha & \beta & & \\ & & & \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \beta \end{matrix}$$

$Ux = b$

$\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) x_{2n} = b_{2n} \Rightarrow x_{2n} = b_{2n} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \right)$

$\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) x_{2n-1} = b_{2n-1} \Rightarrow x_{2n-1} = b_{2n-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \right)$

$\vdots$

$\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) x_{n+1} = b_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = b_{n+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \right)$

$\alpha x_n + \beta x_{n+1} = b_n \Rightarrow x_n = (b_n - \beta x_{n+1})/\alpha$

$\alpha x_{n-1} + \beta x_{n+2} = b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = (b_{n-1} - \beta x_{n+2})/\alpha$

$\vdots$

$x_k = (b_k - \beta x_{2n-k+1})/\alpha \qquad k = n:-1:1$

```
function x = syssolve(alfa, beta, b)
  n2 = lenght(b);
  if rem(n2,2) ~= 0; error('dimensioni non valide') end;
  n = n2/2;
  x = zeros(n2, 1);
  for i = n+1 : n2
      x(i) = b(i) * alfa / (alfa^2 - beta^2);
  end
  for i = n:-1:1
      x(i) = (b(i) - beta * x(n2-i+1)) / alfa;
  end
```

Esercizio 2. Sia $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = 1; \\ -1 \text{ se } i = j + 1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ottiene

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si scriva una funzione Matlab di costo lineare che dato in input n restituisce la marice A_n.
2. Si dica se il metodo di Gauss può essere applicato senza scambi di riga ad A_n e nel caso si determini la matrice triangolare superiore.
3. Si mostri che A_n è invertibile e si determini $\det(A_n)$.
4. ~~Utilizzando il comando `cond` in Matlab si analizzi sperimentalmente il condizionamento $\mathcal{K}_\infty(A_n)$ in norma infinito della matrice A_n riportando il valore del rapporti $\frac{\mathcal{K}_\infty(A_n)}{\det(A_n)}$ e $\frac{\mathcal{K}_\infty(A_n)}{n^2}$ per $n \in \{100, 200, 400, 800\}$.~~

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & -1 & \cdot \end{bmatrix}$$

1.
```
function A=costruisci(n)
    A=zeros(n)
    for j=1:n
        A(1,j)=1
    end
    for i=2:n
        A(i,i-1)=-1;
    end
end
```

2) Applicando un passo di Gauss si ottiene

$$A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & -1 & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \boxed{A_{n-1}^{(0)}} & \end{bmatrix}$$

Induttivamente si ottiene

$$A_n^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

3) $\det A = \det A_n^{(n-1)} = 1$

quindi A è invertibile