Calcolo Numerico
Soluzioni del Foglio di Esercizi #1

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Marzo 2022

Lo studente che consegnerà gli esercizi assegnati durante l'anno e dimostrerà in sede di orale di averli svolti in sufficiente autonomia può aumentare il voto della prova orale fino a 3 punti in uno degli appelli dell'anno accademico 2019/2020.

Esercizi Gruppo 1

Esercizio 1. Si dimostri che la seguente funzione $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$

$$f(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2| + \|\mathbf{x}\|_\infty$$

è una norma.

Soluzione 1. Per dimostrare che $f(x)$ è una norma, occorre far vedere che sono verificate le tre proprietà delle norme:

1. $f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ visto che è somma di quantità non negative. Inoltre, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, se e solo se contemporaneamente i due addendi sono nulli cioè $x_1 = x_2$ e $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0$, Ma poichè $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ abbiamo la tesi.
2. $f(\alpha\,\mathbf{x}) = |\alpha\mathbf{x_1} - \alpha\mathbf{x_2}| + \|\alpha\mathbf{x}\|_\infty = |\alpha|\,|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}| + |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|_\infty = |\alpha|\,\mathbf{f}(\alpha\,\mathbf{x})$.
3. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |x_1+y_1-(x_2+y_2)| + \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty \leq |x_1-x_2| + |y_1-y_2| + \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ perchè vale la disuguaglianza triangolare dei moduli e per la proprità 3. per la norma infinito.

Esercizio 2. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che

$$\|\mathbf{x}\mathbf{y}^T\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2\,\|\mathbf{y}\|_2.$$

Suggerimento: Si sfruttino le proprietà della matrice $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ di cui si conoscono gli autovalori.

Soluzione 2. Per definizione,

$$\|\mathbf{x}\mathbf{y}^T\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbf{x}\mathbf{y}^T)^T(\mathbf{x}\mathbf{y}^T))} = \sqrt{\rho(\mathbf{y}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T)}.$$

Si osserva che

$$\mathbf{y}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T = \mathbf{y}(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\mathbf{y}^T = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{y}\mathbf{y})^T.$$

Notiamo che $(\mathbf{x}^T\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$, e quindi $\rho((\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{y}\mathbf{y})^T) = \|\mathbf{x}\|_2^2\rho(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$. Gli autovalori della matrice $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ sono $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica $n-1$ e un autovalore $\lambda = (\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|_2^2$. Da questo segue la tesi.

Esercizio 3. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si definisce esponenziale di matrice la matrice

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

a) Si dimostri che se A è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ allora e^A è diagonalizzabile con autovalori $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$.

b) Si dimostri che per ogni norma matriciale, e per ogni A risulta

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Soluzione 3. a) Se A è diagonalizzabile, allora esiste V non singolare tale che $A = VDV^{-1}$ dove $D_{ii} = \lambda_i$. Per come è definitol'esponenziale di matrici abbiamo che

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(VDV^{-1})^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(VD^iV)^i}{i!} = V\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{D^i}{i!}\right)V^{-1} = Ve^DV^{-1}.$$

La matrice e^D risulta diagonale con elementi e^{λ_i}, da cui abbiamo che gli autovalori di e^A sono della forma e^{λ_i}.

b) Applicando la disuguaglianza triangolare delle norme (che vale anche per somme infinite...) e la submoltiplicatività delle norme matriciali abbiamo

$$\|e^A\| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A^i\|}{i!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} = e^{\|A\|}.$$

Esercizio 4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e sia $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ la j-esima colonna di A. Dimostrare che la funzione $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definita come

$$\phi(A) = \max_j \|\mathbf{a}_j\|_2$$

non definisce una norma matriciale.

Soluzione 4. Basta dimostrare che una delle proprietà delle norme è violata su un esempio particolare. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo che $\phi(A) = \max\{2, \sqrt{5}\} = \sqrt{5}$. Si osserva che $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, e quindi $\phi(A^2) = \max\{4, 4\sqrt{2}\} = 4\sqrt{2}$, ma $\phi(A^2) > \phi(A)^2$, che dimostra che ϕ non è una norma matriciale in quanto è violata la submoltiplicatività.

Esercizio 5. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 3a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, a > 0.$$

Si determini il valore del parametro reale a per cui il numero di condizionamento $\mu_\infty(A)$ sia minimo.

Soluzione 5. Abbiamo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/(2a) & 3/2 \\ 1/(2a) & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $\|A\|_\infty = \max\{4a, 2\}$ e $\|A^{-1}\|_\infty = (3 + 1/a)/2$. Quindi

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 2(3a+1) & \text{se } a \geq 1/2, \\ (3a+1)/a & \text{se } 0 < a < 1/2. \end{cases}$$

Il minimo di questa funzione si ottiene per $a = 1/2$ e vale 5.

Esercizi Gruppo 2

Esercizio 6. Si considerino le matrici $L, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definite nel seguente modo

$$l_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & i = j+1 \\ 0 & \text{altrmenti} \end{cases} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -2 & i = j+1 \\ 0 & \text{altrmenti} \end{cases}$$

a) Si dimostri che le due matrici L ed M sono invertibili.

b) Si calcoli $\mu_\infty(L), \mu_\infty(M)$.

c) Si scriva una funzione Matlab (di complessità lineare) `y=inf_bisolve(A, b)` che, presa una matrice bidiagonale inferiore ed un vettore colonna `b`, resituisca il vettore `y` tale che $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

d) Per $n = 10^3$ sia `x=rand(n,1)`, `b_1=L*x` e `b_2=M*x`. Utilizzando la funzione scritta si calcolino le soluzioni dei sistemi $L\mathbf{y_1} = \mathbf{b_1}$ e $M\mathbf{y_2} = \mathbf{b_2}$, che in aritmetica esatta produrrebbero le soluzioni $\mathbf{y_1} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{y_2} = \mathbf{x}$.

Si riportino gli errori relativi in norma infinito, cioè

$$\frac{\|\mathbf{y_i} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}, \quad i = 1, 2.$$

Si motivi il risultato alla luce del teorema sul condizionamento dei sistemi lineari.

e) Si ripeta lo stesso ragionameto ma scegliendo `x=ones(n,1)`. Cosa si ottiene in questo caso? Motivate la risposta.

Soluzione 6. a) Le matrici sono triangolari inferiori con elementi diagonali diversi da zero, e quindi sono invertibili.

b) Occorre calcolare L^{-1} e M^{-1}. Le matrici sono triangolari inferiori e la $k-$esima colonna delle inverse ($l^{(k)}$ o $m^{(k)}$) può essere trovata imponendo la condizione

$$Ll^{(k)} = e_k \quad Mm^{(k)} = e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Poichè i sistemi sono bidiagonali possiamo risolvere con il metodo di sostituzione. Otteniamo $l_i^{(k)} = 0$ se $i < k$, $l_i^{(k)} = 1/2$ se $i = k$ e $l_i^{(k)} = a_{i-1}^{(k)}/2$, e similmente $m_i^{(k)} = 0$ se $i < k$, $m_i^{(k)} = 1$ se $i = k$ e $m_i^{(k)} = 2m_{i-1}^{(k)}$.

Abbiamo quindi che

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & & & & \\ 1/4 & 1/2 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 2^{-n+1} & & & 1/2 & \\ 2^{-n} & 2^{-n+1} & \dots & & 1/2 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 2^{n-2} & & & 1 & \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & \dots & & 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo allora

$$\|L\|_\infty = 3, \quad \|L^{-1}\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} - 1 = 2 - 2^{-n} - 1 = 1 - 2^{-n},$$

e quindi $\mu_\infty(L) = 3(1 - 2^{-n}) < 3$, mentre

$$\|M\|_\infty = 3, \quad \|M^{-1}\|_\infty = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1,$$

e quindi $\mu_\infty(M) = 3(2^n - 1)$, che risulta un valore molto grande.

c)

```
function y=inf_bisolve(A,b)
n=length(b);
y=zeros(n, 1);
y(1)=b(1)/A(1, 1);
```

```
for i=2:n
   y(i)=(b(i)-A(i, i-1)*y(i-1))/A(i, i);
 end
end
```

d) Si ottiene

$$\frac{\|\mathbf{y_1} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = 1.1108e - 16,$$

quindi la soluzione calcolata è molto accurata perchè l'errore relativo è dell'ordine della precisione di macchina. Per M abbiamo invece

$$\frac{\|\mathbf{y_2} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = 2.3235e + 282$$

cioè la soluzione prodotta è completamente priva di significato. Il risultato è in linea con il risultato dato dal teorema del condizionamento ovvero che

$$\frac{\|\mathbf{y_2} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \mu_\infty(M)|\varepsilon_{b_2}|,$$

supponendo che $|\varepsilon_{b_2}| < u$, e sapendo che per $n = 10^3, \mu_\infty(M) = 3(2^{1000} - 1)$ otteniamo che l'errore può essere dell'ordine di 10^{285}, per cui il risultato è in linea con il teorema. L invece è una matrice ben condizionata e quindi non abbiamo un'amplificazione dell'errore sui dati.

e) Scegliendo `x=ones(n,1)` e ripetendo lo stesso ragionamento troviamo che i vettori calcolati $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$ non sono affetti da errore. Il teorema di condizionamento vale ancora ma $\varepsilon_b = 0$ inquanto $b_2 = M * x$ è un vettore di valori interi che quindi si rappresentano in modo esatto.

Esercizio 7. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = (a_{i,j})$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha \text{ se } i = j; i \neq n \\ \beta \text{ se } i = 1, j = n; \\ 2 \text{ se } i = n, 1 \leq j \leq n; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si determini $k > 0$ tale che A è invertibile $\forall \alpha, \beta$ con $|\alpha| > k$ e $|\beta| < k$.

2. Si determini per quali valori di α e β la matrice A ammette fattorizzazione LU.

3. Per tali valori si determini la fattorizzazione LU.

4. Si determini per quali valori di α e β la matrice risulta singolare.

5. Si scriva una funzione Matlab che, presi in ingresso α, β ed il vettore $\mathbf{b}$ implementi un metodo a costo lineare in termini di operazioni aritmetiche ed occupazione di memoria per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soluzione 7. 1. La matrice è a predominanza diagonale per colonne scegliendo k=2.

2. Le matrici principali di testa di A fino a ordine $n-1$ sono diagonali con α sulla diagonale. Quindi se $\alpha \neq 0$ sono verifiucate le condizioni per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di A. Se $\alpha = 0$, la fattorizzazione non esiste. INfatti assumiamo per assurdo che questa esista, allora $L^{-1}A = U$. Calcolando il valore dell'elemento $u_{n,1}$ come prodotto scalare tra l;'ultima riga di L^{-1} e della prima colonna di U si triva che $u_{n,.1} = 1$ che é un assurdo dal momento che U deve essere triangolare superiore.

3. Risolvendo i 4 sistemi della dimostrazione di esistenza ed unicità della fattorizzazione LU si ottine che

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 2/\alpha & \cdots & & 2/\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha & & & & \beta \\ & \alpha & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2(1-\beta/\alpha) \end{bmatrix}$$

4. $\det(A) = \det(U) = 2\alpha^{n-1}(1-\beta/\alpha)$. Quindi, A è non singolare se e solo se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$.

5.
```
function x=solve(alfa, beta,b)
n=length(b);
% risolvo il sistema Ly=b
y=b;
y(n)=b(n)-2/alfa*sum(b(1:n-1));
% risolvo il sistema Ux=y
x=y;
x(n)=y(n)/(alfa*(1-beta)/2);
x(1)=(y(1)-beta*x(n))/alfa;
end
```

Esercizio 8. Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matrice ad albero simmetrica

$$A_n = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Si dimostri per induzione che vale

$$\det(A_n) = \beta^n - (n-1)\alpha^2\beta^{n-2}.$$

b) Sia J la matrice tale che $J_{ij} = 1$ se $i + j = n$ e zero altrimenti, si dica quale è la struttura della matrice $B = JAJ$.

c) Si dica se, scegliendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, sono garantite le condizioni di esistenza ed unicità della fattorizzazione LU di A, e di B.

d) Si scriva una funzione Matlab `function [L, U]=lu_tree(alpha,beta)` che, presi in ingresso i valori α e β, e senza costruire in modo esplicito la matrice B, restituisca le matrici L e U della fattorizzazione LU di B.

Soluzione 8. a)Dimostraiamo la formula per induzione su n. Per $n = 2, \det(A_2) = \beta^2 - \alpha^2$, e quindi la formula è dimostrata. Supponiamo che la formula sia verificata per matrici di dimensione $n-1$ e dimostriamolo per n. Sviluppando con Laplace rispetto all'ultima riga abbiamo:$\det(A_n) = \beta \det(A_{n-1}) + (-1)^{n+1}\alpha((-1)^n\alpha\beta^{n-2}) = \beta(\beta^{n-1} - (n-2)\alpha^2\beta^{n-3}) - \alpha^2\beta^{n-2} = \beta^n - (n-2)\alpha^2\beta^{n-2} - \alpha^2\beta^{n-2} = \beta^n - (n-1)\alpha^2\beta^{n-2}$.

b)

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 & \cdots & \alpha \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \cdots & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

c) Per A il determinante dei minori principali di testa risulta $\det A_k = 2^k - (k-1)2^{k-2} = 2^{k-2}(4 - k + 1)$ e $\det A_k = 0$ se $k = 5$.

Quindi se la matrice ha dimensione $n > 5$ non sono soddisfatte le condizioni di esistenza ed unicità della fattorizzazione LU. Si nota che invece per B le condizioni sono sempre verificate.

d)

```
function [L, U]=lu_tree(a, b)
       n=length(b);
       L=eye(n);
       L(n, 1:n-1)=a'./b(1:n-1)';
       U=diag(b);
       U(1:n-1, n)=a;
       s=0;
       for i=1:n-1
              s=s+a(i)^2/b(i);
       end
       U(n, n)=b(n)-s;
end
```

La funzione ha costo lineare in n.

Esercizio 9. Sia $A = I - \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = [1, 1, \dots, 1]^T$.

a) Si diano condizioni sufficienti su α affinchè la matrice risulti invertibile.

b) Si diano condizioni su α affinchè la matrice ammetta fattorizzazione LU e si determini tale fattorizzazione.

c) Si dica quali sono gli autovalori di A.

Soluzione 9. a) Sappiamo che se lo zero non appartiene all'unione dei cerchi di Gershgorin la matrice è invertibile, da cui risulta che se $|1-\alpha| > |\alpha|(n-1)$ allora A è invertibile. Abbiamo tre casi: $0 < \alpha < 1$ da cui $1 - \alpha > \alpha(n-1)$ cioè $\alpha < 1/(n-2)$. Se $\alpha > 1$ allora $\alpha - 1 > \alpha(n-1)$ che non è mai verificata. Se $\alpha < 0$, allora deve essere $1-\alpha > -\alpha(n-1)$ che fornisce la condizione $-1/(n-2) < \alpha < 0$. Per cui la matrice risulta invertibile se $|\alpha| < 1/(n-2)$.

Più in generale, una matrice è invertibile se non ha autovalori uguali a zero. Gli autovalori di A sono del tipo $1 - \alpha\lambda(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}})$. La matrice di rango uno $\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}$ ha un autovalore uguale a 0 di molteplicità $n-1$ ed un autovalore uguale a $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = n$, quindi gli autovalori di A sono 1 con molteplicità $n-1$ e $1 - \alpha\, n$ con molteplicità 1. Quindi abbiamo la condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di A che $\alpha \neq 1/n$.

(b) La matrice A risulta fattorizzabile LU se i minori principali di testa di ordine k, $k = 1, \dots, n-1$ sono non singolari. Si osserva che $A_k = A(1:k, 1:k) = I_k - \alpha \mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^T$, che risulta non singonale se e solo se $\alpha \neq 1/k$, per $k = 1 \dots, n-1$. I fattori L e U risultano

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{\alpha}{j\alpha - 1} & i > j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad , \quad u_{ij} = \begin{cases} \frac{i\alpha-1}{(i-1)\alpha-1} & i = j \\ \frac{\alpha}{(i-1)\alpha-1} & j > i \\ 0 & i < j \end{cases}$$

Dimostriamo per induzione che questa risulta la fattorizzazione LU di A. Per $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ 0 & \frac{2\alpha-1}{\alpha-1} \end{bmatrix}$$

che verifica la formula precedente. Supponiamo che L_{n-1}, U_{n-1} siano i fattori della fattorizzazione LU del minore principale di testa di ordine $n-1$ e che abbiano la struttura data dalle equazioni precedenti, allora

$$L_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ y^T & 1 \end{bmatrix}, U_n = \begin{bmatrix} U_{n-1} & z \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

fattori di A devono essere tali che $A = LU$. Imponendo le condizioni otteniamo

$$U_{n-1}^T y = -\alpha \mathbf{u}_{n-1}, \quad L_{n-1} z = -\alpha \mathbf{u}_{n-1}, \quad y^T z + \beta = 1 - \alpha,$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{u}_{n-1}$ il vettore di dimensione $n-1$ con tutte le componenti uguali a 1. Questi sistemi sono risolti prendendo $y(i) = \frac{\alpha}{j\alpha - 1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $z(i) = \frac{\alpha}{i\alpha-1}$ e $\beta = \frac{n\alpha-1}{(n-1)\alpha-1}$.

c) Gli autovalori di A sono della forma $1-\lambda$ con λ autovalore di $\alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Quindi gli autovalori di A sono 1 con molteplicit̀ $n-1$ e $1-\alpha\|\mathbf{u}\|_2^2$ con molteplicità 1.

Esercizio 10. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i < j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si calcoli A^{-1} .

b) Si calcoli $\mu_\infty(A)$.

c) Si scriva una funzione Matlab di costo lineare in n per la risoluzione del sistema linearre $Ax = b$.

Soluzione 10. a) Si osserva come prima cosa che l'inversa di una matrice triangolare superiore è ancora triangolare superiore. Inoltre gli elementi diagonali sono i reciproci degli elementi diagonali essendo questi gli autovalori. Per trovare l'inversa possiamo risolvere gli n sistemi lineari $Ax^{(i)} = e_i$ dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica e $x^{(i)}$ è la $i$esima colonna dell'inversa. In particolare abbiamo $x_k^{(i)} = 0$ per $k > i$ poichè $X = [x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}]$ deve essere triangolare. Imponendo l'uguaglianza $Ax^{(i)} = e_i$ su tutte le componenti abbiamo

$$\sum_{k=i}^{\min(n,j)} a_{ik} x_k^{(j)} = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots n,$$

con $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ altrimenti. Quindi $x_i^{(i)} = 1$, e $x_k^{(j)} = 2^{j-k-1}$, per $k = 1, \ldots, j-1$. Risolvendo questi sistemi triangolari otteniamo

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} \\ & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-3} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 & 2 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Abbiamo $\|A\|_\infty = n$, mentre $\|A^{-1}\|_\infty = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 2^{n-1}$. Quindi $\mu_\infty(A) = n\,2^{n-1}$..

c) La funzione risulta

```
function x=sysone(b)
n=length(b);
x=zeros(n, 1);
x(n)=b(n);
```

```
s=x(n);
for i=n-1:-1:1
       x(i)=b(i)+s;
       s=s+x(i);
end
```

La funzione ha costo lineare a causa del ciclo for all'interno del quale si effettuano 2 operazioni aritmetiche.

Esercizio 11. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ \alpha & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale α, la matrice A ammette fattorizzazione LU.

b) Per tali valori si calcoli tale fattorizzazione e si dica se la fattorizzazione è unica.

c) Si implementi in Matlab il processo di sostituzione all'indietro per la risoluzione del sistema $Ux = b$, e si testi la funzione con `b=ones(n,1)`

Soluzione 11. a) Il parametro α non interviene nelle condizioni di esistenza ed unicità. Infatti si trova sull'ultima riga. La fattorizzazione LU di A esiste sempre poichè i minori principali di testa fino all'ordine $n-1$ sono nonsingolari dato che sono matrici triangolari superiori con 1 sulla diagonale.

b) Utilizzando il teorema di esistenza ed unicità sappiamo che la fattorizzazione LU di A può essere ottenuta dalla fattorizzazione LU del minore principale di ordine $n-1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ \hline \alpha & & & & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$$

Poichè $A(1:n-1, 1:n-1)$ è triagonale superiore, abbiamo che $L_{n-1} = I_{n-1}$, mentre

$$U_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi le condizioni

$$x^T U_{n-1} = \alpha e_1^T, \quad L_{n-1} y = A(1:n-1, n), \quad x^T y + \beta = a_{nn}$$

che sono risolte per $y = A(1:n-1, n)$, $x_i = \alpha$, e $\beta = 1 + \alpha$.

c) Poichè U risulta

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

abbiamo che affinchè il sistema abbia un'unica soluzione occorre che $\det U = 1 + \alpha \neq 0$ cioè $\alpha \neq -1$. Sotto queste ipotesi, abbiamo che le componenti della soluzione del sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risultano

$$x_n = \frac{b_n}{1+\alpha}, \quad x_i = b_i + x_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

La funzione in Matlab risulta

```
function [ x ] = sup_solve_special( b, alpha )
%Risolve un sistema triangolare superiore con matrice
% bidiagonale con 1 sulla diagonale tranne che 1+\alpha
% e -1 sulla sopra diagonale

n=length(b);
x(n)=b(n)/(1+alpha);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=b(i)+x(i+1);
end

end
```

Esercizio 12. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$ tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si dimostri che $\mu_2(A) = \rho(A)\rho(A^{-1})$.

c) Si dimostri che A ammette fattorizzazione LU.

d) Determinare il costo computazionale del calcolo di tale fattorizzazione.

Soluzione 12. a) Poichè A è simmetrica abbiamo che anche A^{-1} lo è. Per ogni matrice simmetrica abbiamo $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A)$, da cui abbiamo la tesi.

b) Utilizzando il teorema di Gerschgorin su A abbiamo che per gli autovalori di A vale che $n-2 \leq \lambda \leq n+2$. Quindi $\rho(A) < n+2$. In modo simile, poichè gli autovalori di A^{-1} sono $1/\lambda$ abbiamo $\frac{1}{n+2} \leq 1/\lambda \leq \frac{1}{n-2}$. Da cui abbiamo $\rho(A^{-1}) \leq \frac{1}{n-2}$.

c) A ammette fattorizzazione LU in quanto A è a predominanza diagonale. Quindi anche tutti i suoi minori principali di testa sono a predominanza diagonale e quindi sono non singolari.

d) Il costo è dell'ordine di n poichè ad ogni passo varia una sola riga della matrice e le sottomatrici rimangono tridiagonali.