Metodi iterativi per equazioni LINEARI $Ax=b$

$$A = M - N \quad , \qquad M \text{ invertibile}$$

$$Ax=b \iff (M-N)x=b \iff Mx-Nx=b$$

$$\iff Mx = Nx+b \iff x = \underbrace{M^{-1}N}_{P \text{ matrice di iterazione}}x + \underbrace{M^{-1}b}_{q}$$

$$x = Px+q$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$$

Teorema: sia $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e sia $x^{(k+1)} = Px^{(k)}+q$. Allora se $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ allora $x^* = Px^*+q$ cioè x^* è soluzione di $Ax=b$

Dim

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$g(x) = Px+q$ è continua

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ è continua}}}{=} g\left(\lim_{k\to\infty} (x^{(k)})\right) = g(x^*) = Px^*+q$$

esempio:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q = M^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^{(1)} = Px^{(0)} + q = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Px^{(1)} + q = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} + q = \begin{pmatrix} -1 \\ 9/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 9/2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In generale non avremo convergenza in un numero finito di passi ma convergenza al <u>limite</u>

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ si ottiene una successione diversa

ma il limite è lo stesso

Def: Un metodo iterativo è convergente se tutte le successioni generate a partire da un qualsiasi $x^{(0)}$ sono convergenti

NB: Esistono metodi ((P, q) oppure (M, N, b)) per i quali ho successioni sia convergenti che non convergenti $\Rightarrow$ questi metodi non sono convergenti.

esempio
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^{(1)} = Px^{(0)} + q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(k)} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ infatti $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ infatti $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

esercizio: $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ fare vedere che esistono delle $x^{(0)}$ tali che
- $x^{(k)} \to$ converge x^*
- $x^{(k)} \to$ diverge

Teorema condizioni sufficienti per la convergenza

Condizione sufficiente affinché un metodo iterativo sia convergente è che esista una norma matriciale indotta: $\|P\| < 1$ (se $\|P\| < 1 \Rightarrow$ convergo)

esempio $P = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|P\|_\infty = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ convergo

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\|P\|_\infty = 1$ non posso applicare il teo

Dim: Dire che $x^{(k)} \to x$ soluzione di $x = Px + q$ equivale a dire che

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{x^{(k)} - x}_{e^{(k)}} = 0 \text{ vettore}$$

$e^{(k)}$ – vettore dell'errore al passo k-esimo

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = \underbrace{Px^{(k)} + q}_{x^{(k+1)}} - (\underbrace{Px + q}_{x}) = P(x^{(k)} - x) = Pe^{(k)}$$

$$= P \cdot Pe^{(k-1)} = P \cdot P \cdot Pe^{(k-2)} = \dots = P^{k+1} e^{(0)}$$

$$\|e^{(k+1)}\| = \|P^{k+1} e^{(0)}\| \le \|P^{k+1}\| \cdot \|e^{(0)}\| \le \|P\|^{k+1} \cdot \|e^{(0)}\|$$

norma vettoriale

compatibilità tra norme vettoriale e matriciale indotta

prop. 4 delle norme

$$0 \leq \| e^{(k+1)} \| \leq \underbrace{\| P \|^{k+1} \cdot \| e^{(0)} \|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad 0 < \|P\| < 1$$

per il teo del confronto $\lim_{k \to \infty} \| e^{(k+1)} \| = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} e^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

Teorema condizioni necessarie

condizione necessaria affinché un metodo sia convergente è che $\rho(P) < 1$ (se il metodo converge $\Rightarrow \rho(P) < 1$)

OSS: L'uso del teorema è il seguente se $\rho(P) \geq 1 \Rightarrow$ il metodo non converge

Dim: supponiamo per assurdo che il metodo sia convergente ma che esista λ autovalore di P tale $|\lambda| \geq 1$.

se il metodo è convergente allora converge per ogni scelta di $x^{(0)}$.

$$x^{(0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soluzione}}}{x} + v$$ autovettore corrispondente a λ

$Pv = \lambda v, \ v \neq 0$

$$e^{(k)} = P^k e^{(0)} = P^k (x^{(0)} - x) = P^k \underset{\substack{\uparrow \\ v \text{ è autovettore}}}{v} = \lambda^k v$$

Poiché il metodo è convergente

$$0 = \lim_{k\to\infty} e^{(k)} \quad \text{ma} \quad 0 = \lim_{k\to\infty} \|e^{(k)}\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda^k v\| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{|\lambda|^k}_{\to +\infty} \|v\|$$

<u>assurdo</u> quindi $|\lambda| < 1$

<u>Teorema</u>: Un metodo è convergente $\Leftrightarrow$ $\rho(P) < 1$

<u>Dim</u>: $\Rightarrow$ già dimostrato in precedenza.

$\Leftarrow$ Facciamo la dimostrazione solo nel caso P diagonalizzabile.

se P è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\exists S$ invertibile tale che

$P = SDS^{-1}$ con $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ e per ipotesi $|\lambda_i| < 1$.

$$\Rightarrow e^{(k)} = P^k e^{(0)} = SD\underbrace{S^{-1}S}_{I}D\underbrace{S^{-1} \cdots}_{I}\underbrace{S}_{I}DS^{-1}e^{(0)} = SD^kS^{-1}e^{(0)}$$

si nota che $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

se $|\lambda_i| < 1$ per $k \to \infty$ $D^k \to 0$ $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} e^{(k)} = S \lim_{k\to\infty} D^k S^{-1} e^{(0)} = 0$$

$\square$

esercizio:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

fare vedere che esistono ~~due~~ $x^{(0)}$ tali che $x^{(k)} \to$ converge, $x^{(k)} \to$ diverge

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k)} = P x^{(k-1)} + q$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \to x^{(k)} = \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ diverge}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad x^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

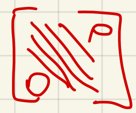
$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} 2^k \varepsilon \\ 1/2^k \end{pmatrix}$$

$Ax = b$

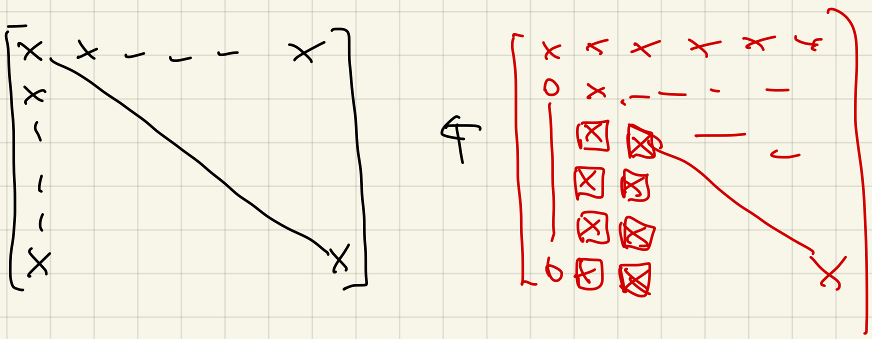
Jacobi | **Gauss-Seidel**

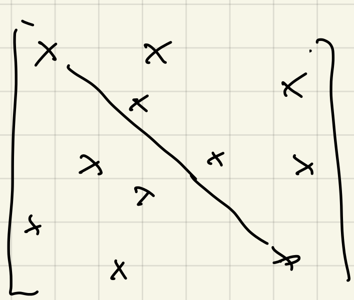
In generale costo $O(n^2 \cdot n_{iter})$ se

A è sparsa cioè $nnz(A) = O(n)$



Su matrici a banda → Gauss ha costo $O(n^2)$





→ Fill-in

→ su matrici sparse $O(nnz(A) \cdot iter) \ll n^3$

Jacobi

$$M_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad N_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ -a_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

$Ax=b$

$J = M^{-1}N \qquad q = M^{-1}b$

$$x^{(k+1)} = J\,x^{(k)} + q$$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}N\,x^{(k)} + q$$

$$M\,x^{(k+1)} = N\,x^{(k)} + b$$

i-esima →

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{N} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$i = 1 \dots n$

$$a_{ii}\,x_i^{(k+1)} = -\left(a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in}x_n^{(k)}\right) + b_i$$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right]}$$

↑ metodo di Jacobi

Un metodo iterativo è applicabile se M è invertibile.

Nel caso di Jacobi M è invertibile se

$a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

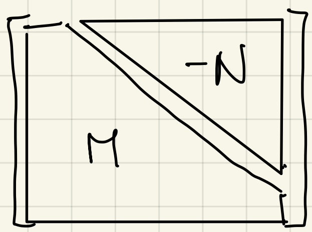
q

devo permutare il vettore x

$$\boxed{\text{Gauss-Seidel}}$$

$$M = \begin{cases} a_{ij} & i \geq j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad N = \begin{cases} 0 & i \geq j \\ -a_{ij} & i < j \end{cases}$$

$A =$



$$G = M^{-1} N \qquad q = M^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + q$$

$$M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

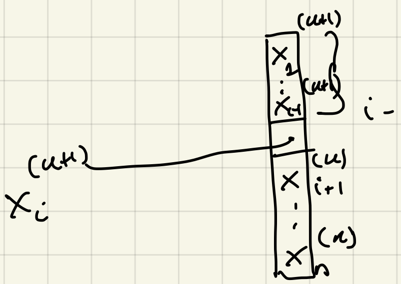
$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}$$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right] \quad i = 1 \dots n}$$

metodo di Gauss-Seidel



$X_{app.}$

Teorema. Se A è a pred. diagonale $\Rightarrow$

1. A è non singolare
2. Jacobi e G. Seidel sono applicabili
3. Jacobi e G. Seidel sono convergenti

Dim:

1. Se A è a pred. diagonali $\Rightarrow$ è invertibile per il teorema di Gershgorin, $\left(|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right)$

② Basta dimostrare che M è invertibile

Nel metodo di Jacobi $M = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$

è invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{ii} \neq 0$ che è sempre vero per matrici a predominanza diagonale

$$|a_{ii}| > \sum' |a_{ij}| \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

M di G.S. $\quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n\cdot} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}$

M è invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{ii} \neq 0$

③ Supponiamo per assurdo i metodi non siano convergenti $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda$: $|\lambda| \geq 1$ con λ autovalore di P $\begin{cases} J \\ G \end{cases}$. λ verifica l'equazione caratteristica

$$0 = \det(P - \lambda I) = \det(M^{-1}N - \lambda \underset{M^{-1}M}{\underbrace{I}}) =$$

$$= \det(-M^{-1} \cdot (\lambda M - N)) = \underset{\neq 0}{\det(-M^{-1})} \cdot \det(\lambda M - N)$$

λ è autovalore $\Leftrightarrow H = \lambda M - N$ è singolare

Facciamo vedere che questo è assurdo poiché H è a predominanza diagonale (se A lo era) e quindi non invertibile

se considero Jacobi

$$H = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \leftarrow \text{pred. diag di } A$$

$$|\lambda||a_{ii}| > |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\lambda||a_{ij}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

cioè H è a pred. diagonale e quindi invertibile

$\Rightarrow$ ASSURDO

Nel caso di Gauss-Seidel

$$H = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ \lambda a_{n1} & \cdots & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda|\,|a_{ii}| > |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda||a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\lambda||a_{ij}| \geq$$

$$\underset{|\lambda|\geq 1}{\geq} \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

cioè H è a pred. diagonale → essendo

es:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \beta & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \beta & & & & \alpha \end{bmatrix}$$

(J) $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

$i=1$ $$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j^{(k)} \right]$$

$i>1$ $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left[b_i - \beta\, x_1^{(k)} \right]$$

(GS) $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

$i=1$ $$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j^{(k)} \right]$$

$i>1$ $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left[b_i - \beta\, x_1^{(k+1)} \right]$$

$$J = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} & -1 & \cdots & -1 \\ -\beta & & & \\ \vdots & & 0 & \\ -\beta & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\alpha & \cdots & -1/\alpha \\ -\beta/\alpha & & & \\ \vdots & & 0 & \\ -\beta/\alpha & & & \end{bmatrix}$$

condizioni sufficienti.

a) A a predominanza diagonale

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha| > n-1 \\ |\alpha| > |\beta| \end{array}\right\} \text{ per riga}$$

per colonne

$$\begin{cases} |\alpha| > (n-1)\,|\beta| \\ |\alpha| > 1 \end{cases}$$

b) Norma ∞ e norma 1 su J equivalgono alla predominanza diagonale condizioni necessarie e sufficienti

$\Rightarrow$ la matrice ha rango 2 quindi ha almeno $n-2$ autovalori nulli. I rimanenti sono di segno opposto in quanto

$tr(A) = \sum \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \cdots + \lambda_n = 0$

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{\alpha} & \cdots & -\frac{1}{\alpha} \\ -\beta/\alpha & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\beta/\alpha & & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = -\lambda_2$

Sie $\quad d_n^{(\lambda)} = \det(J_n - \lambda I)$

$$d_n(\lambda) = -\lambda \cdot d_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & \cdots & -\frac{1}{\alpha} \\ -\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda\, d_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)(-1)^{n} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right)(-\lambda)^{n-2}$$

Da cui

$$d_n(\lambda) = -\lambda \cdot d_{n-1}(\lambda) - \frac{\beta}{\alpha^2}(-\lambda)^{n-2}$$

$n = 2$ $\quad \begin{pmatrix} -\lambda & -1/\alpha \\ -\beta/\alpha & -\lambda \end{pmatrix} \quad d_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\beta}{\alpha^2}$

$n = 3$ $\quad d_3(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) - \frac{\beta}{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\lambda\right) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)$$

Criteri d'arresto

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$$

come scopro che la mia iterata $x^{(k)}$ è vicina alla soluzione?

① Residuo

$$\| b - A x^{(k)} \| \leq tol \qquad \left(\frac{\| b - A x^{(k)} \|}{\| x^{(k)} \|} \leq tol \right)$$

② Distanza tra due iterate

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq tol$$

③ Distanza relativa

$$\frac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k)} \|} \leq tol$$

Il fatto di essermi arrestato al passo k-esimo perché $\| b - A x^{(k)} \| \leq tol$ mi assicura di aver "approssimato bene" x? cioè $\| x^{(k)} - x \| \overset{?}{\leq} tol$

No perchè posso ancora essere lontano dalla soluzione cioè $\| e^{(k)} \| \gg tol$

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \underbrace{x^{(k+1)} - x}_{e^{(k+1)}} - (\underbrace{x^{(k)} - x}_{e^{(k)}}) = e^{(k+1)} - e^{(k)}$$

$$\begin{cases} e^{(k+1)} = P e^{(k)} \\ x^{(k+1)} - x = P x^{(k)} + q - (Px + q) = P x^{(k)} - Px = P(e^{k}) \\ x^{(k+1)} - x^{(k)} = \underbrace{(P - I)} e_k \end{cases}$$

poiché $\rho(P) < 1$ $\quad P - I$ è invertibile

infatti: $\lambda(P-I) = \lambda(P) - 1$

$\lambda(P) \neq 1$

$\lambda(P - I) \neq 0 \Rightarrow P - I$ è invertibile

$$e^{(k)} = (P - I)^{-1} \left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right)$$

$$\| e^{(k)} \| = \| (P-I)^{-1} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \| \leq \| (P-I)^{-1} \| \cdot \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq tol \; \| (P-I)^{-1} \|$$

se $\| (P - I)^{-1} \|$ è "piccola" $\Rightarrow \| e^{(k)} \| < O(tol)$

se si fa il discorso con il residuo

$$\| x^{(k)} - x \| \leq tol \; \| A^{-1} \|$$