Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

Compito 07/03/2024

Sia a l'ultima cifra del proprio numero di matricola. Se tale cifra è zero si utilizzi la cifra meno significativa diversa da zero. Quindi $1 \le a \le 9$.

Esercizio 1. (12 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x-a}{x^3}(x^2 + ax + a^2) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3.$$

(a) Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$ in funzione del dato x.

(b) Si studi la stabilità del calcolo della funzione secondo i due algoritmi.

(c) Sia $x = a - 10^{-3}$. Supponendo di operare in $\mathcal{F}(10, 6, m, M)$ con arrotondamento, si dica se $x \in \mathcal{F}$. Si dica qual è il valore effettivamente calcolato per $f(x)$ operando con troncamento in $\mathcal{F}$ ed utilizzando il secondo algoritmo.

Esercizio 2. (18 punti) Sia $M \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \ge 3$ la matrice definita come

$$M = e_1 u^T - e_n u^T, \quad u = (0, 1, 1, \dots, 1, 0)^T.$$

(a) Si costruisca M e si verifichi che $M^2 = 0$ e si calcoli $M^T M$.

(b) Sia $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = \alpha I + \beta M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\}$. Si dimostri che le matrici in questa classe sono sempre invertibili, e che la classe è chiusa rispetto al prodotto ed inversione, cioè che se $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ allora $A_1 A_2 \in \mathcal{S}$ e che se $A \in \mathcal{S}$ allora $A^{-1} \in \mathcal{S}$. Si determini la forma esplicita dell'inversa nel caso $A = \frac{a}{2} I + \frac{1}{n} M$ (dove a è sempre il valore dell'ultima cifra diversa da zero del numero di matricola).

(c) Si dimostri che $A = \frac{a}{2} I + \frac{1}{n} M$ è fattorizzabile LU e si calcolino i due fattori triangolari. Quanto vale il $\det(A)$?

(d) Sia $B = A + A^T$. Utilizzando i cerchi di Gershgorin si dia una limitazione superiore a $\mathcal{K}_2(B) = \|B\|_2 \|B^{-1}\|_2$.