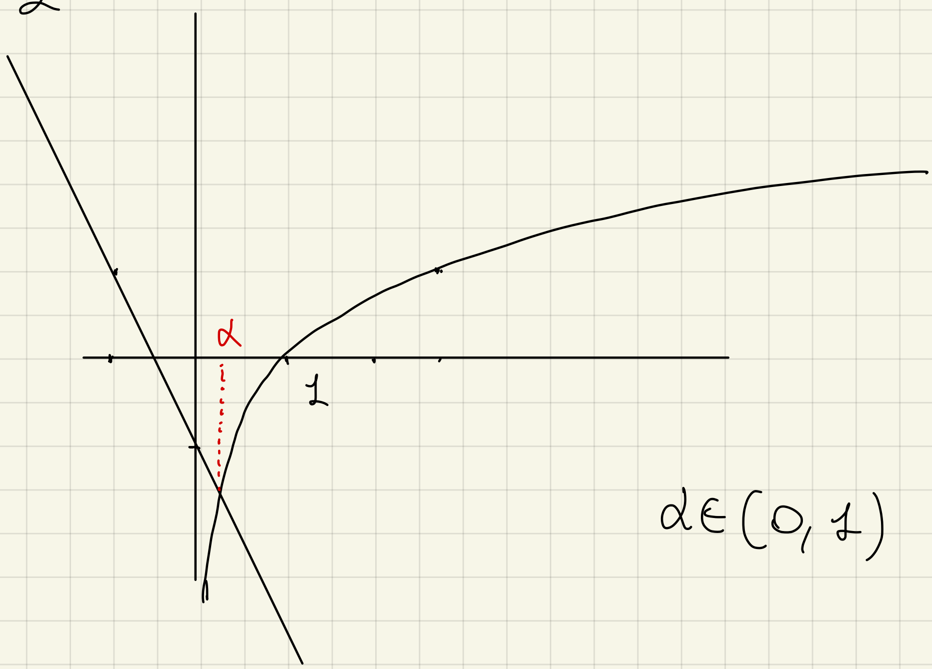
Correzione appello straordinario 10/3/2025

Es 1. $f(x) = \log(\sqrt{x}) + x + \frac{1}{2} = 0 \qquad x > 0$

1. Con la separazione grafica $\log\sqrt{x} = -x - \frac{1}{2}$

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$

$\frac{1}{2}\log x = -x - \frac{1}{2} \iff \log x = -2x - 1$



$\alpha \in (0, 1)$

2. Per verificare la locale convergenza basta appurare che α è radice semplice.

$f'(x) = \frac{1}{2x} + 1 = 0$ mai poiché $x > 0$

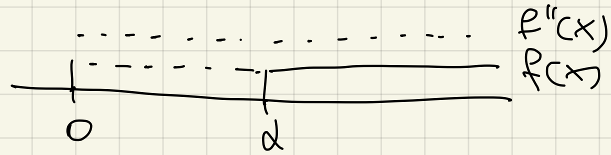
quindi $f'(\alpha) > 0$ e pertanto $f'(\alpha) \neq 0$ cioè

è radice semplice quindi il MdT converge con ordine almeno 2.

3. Possiamo usare il teorema di convergenza in largo.

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} < 0 \qquad \forall x$$

quindi abbiamo che



$$\forall x \in (0,\alpha) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \neq 0 \\ f(x) f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

per il teo di convergenza in largo abbiamo che
$\forall x_0 \in (0,\alpha) \Rightarrow x_k \in (0,\alpha)$ e $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$.
La successione è monotona crescente.

4. Se $x_0 \in (\alpha, 1) \Rightarrow x_1 < \alpha$. Se $x_1 > 0$ avrò a questo punto convergenza per il punto 3.

Per $x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \dfrac{3/2}{\frac{1}{2}+1} = 0$

quindi da $x_0 = 1$ non ho convergenza.
Invece per $\alpha < x_0 < 1$ abbiamo che

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\begin{matrix} f(x_0) > 0 \\ f'(x_0) > 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 < x_0$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Quindi g è decrescente per $x > \alpha$

se se $\alpha < x_0 < 1 \Rightarrow$

$$\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{g(\alpha)}} > \underset{x_1}{\underset{\shortparallel}{g(x_0)}} > \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(1)}}$$

quindi per $x_0 \in (\alpha, 1) \Rightarrow x_1 \in (0, \alpha)$ e ho convergenza.

5.

```
Function [xk, k] = tangenti(x0)
  f = @(x) log(sqrt(x)) + x + 1/2;
  f1 = @(x) 1/(2*x) + 1;

  xk = x0 - f(x0)/f1(x1);
  k = 1

  while xk - x0 > 0
      x0 = xk
      xk = x0 - f(x0)/f1(x0);
      k = k+1;
  end
```

In particolare se $x_0 \in (0, \alpha)$ avremo che continuo a iterare pertanto che non dobbiamo $x_k > \alpha$, questo sarà dovuto ad un errore dovuto all'aritmetica finita perché in teoria la successione dovrebbe essere monotona crescente.

Es 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ -\alpha & \cdots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

1. la matrice è a pred. diag per colonne per $1 > 2|\alpha| \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{2}$

   la pred. diag per righe invece caratteri per limitate sui possibili valori di α.

2. $M = I$ $\qquad N = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ & & 0 & \\ \alpha & \cdots & \alpha & 0 \end{bmatrix}$

$$J = M^{-1}N = N = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ & & & \\ \alpha & \cdots & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo calcolare gli autovalori di J.

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ & -\lambda & & \\ & & \ddots & -\lambda \\ \alpha & \cdots & \alpha & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)^{n-2} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha \\ \alpha & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 + \alpha^2) = 0$$

$$\Rightarrow \rho(J) = |\alpha|$$

Quindi il metodo di Jacobi converge se e solo se $|\alpha|<1$.

Quindi per $\frac{1}{2}<|\alpha|<1$ abbiamo che la matrice A non è a predominanza diagonale ma il metodo di Jacobi risulta convergente.

3. Fatt. LU.

Si nota che i minori principali di testa di ordine k.

$$A(1:k,1:k)=\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \alpha \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad k=1,\dots n-1$$

sono triangolari superiori e $\det(A(1:k,1:k))=1\neq 0$

$\Rightarrow$ A è Fatt. LU in modo unico.

$$A(1:n-1,1:n-1)=L_{n-1}U_{n-1} \quad \text{con} \quad L_{n-1}=I_{n-1}$$
$$U_{n-1}=A(1:n-1,1:n-1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & \\ \hline -\alpha & \cdots & & -\alpha & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & \cdots & \alpha & \\ & \ddots & & & y \\ & & & 1 & \\ \hline & & 0 & & \beta \end{array}\right]$$

Vanno determinati x^T, y e β.

$$I_{n-1}\cdot y=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow y=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$x^T\cdot\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ & & & 1\end{pmatrix}=(-\alpha \cdots -\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \vdots \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\alpha$

$\alpha x_1 + x_2 = -\alpha \Rightarrow x_2 = -\alpha + \alpha^2$

$\alpha x_1 + x_3 = -\alpha \Rightarrow x_3 = \alpha^2 - \alpha$

$\vdots$

$x_{n-1} = \alpha^2 - \alpha$

$$x^T y + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - x^T y = 1 - (-\alpha, \alpha^2 - \alpha, \alpha^2 - \alpha \dots \alpha^2 - \alpha) \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = 1 + \alpha^2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ -\alpha & \alpha^2-\alpha & \dots \; \alpha^2-\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \dots \alpha & & \alpha \\ & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1+\alpha^2 \end{bmatrix}$$

4.

```
Function   y = prodotto (x, alfa)
 n = lenght (x);
 y = x;
 s = 0;
 for i = 2:n-1
     s = s + x(i);
 end
 y(1) = x(1) + alfa * (s + x(n));
 y(n) = -alfa * (x(1) + s) + x(n);
end
```

$y_1 = x_1 + \alpha * (x_2 + \dots + x_{n-1}) + \alpha x_n$

$y_2 = x_2$

$\vdots$

$y_{n-1} = x_{n-1}$

$y_n = -\alpha x_1 - \alpha * (x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n$