Esercitazione del 21/3/2025

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad n \geq 3$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \quad i = 1 \dots n \\ -\frac{1}{3} & \text{se } j = i+2 \quad i = 1 \dots n-2 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } j = i-2 \quad i = 3, \dots n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Si dimostri che GS è convergente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & -\frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{3} & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{3} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ se A è a pred. diag. allora GS (e J.) sono applicabili e convergenti.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

$i = 1, 2 \qquad 1 > \frac{1}{3} \quad \checkmark$

$i = 3, \dots n-2 \qquad 1 > \left|-\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} \quad \checkmark$

$i = n-1, n \qquad 1 > \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \quad \checkmark$

2. Sia $G = M^{-1}N$ la matrice di iterazione di G.S. Noto che $\|M^{-1}\|_1 \le 3/2$ si dimostri che

$\|G\|_1 \le \frac{1}{2}$

$$\|G\|_1 = \|M^{-1}N\|_1 \underset{\substack{\text{prop.}\\ \text{4 delle norme}}}{\le} \|M^{-1}\|_1 \cdot \|N\|_1 \le \frac{3}{2}\|N\|_1$$

$$M = \text{tril}(A) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ -\frac{1}{3} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N = -\text{triu}(A, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{3} \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|N\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |n_{ij}| = \max\left\{0, 0, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \|G\|_1 \le \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ (quindi trovo la conv. utilizzando la condizione suff. sui metodi iterativi generale: $\exists \|\cdot\|$ n.m.i : $\|P\| < 1$)

3. Si determini il numero k di iterazioni sufficienti a garantire

$$\frac{\|e^{(k)}\|_1}{\|e^{(0)}\|_1} \leq 2^{-16}$$

Dalle teorie sappiamo che

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x = P x^{(k-1)} + q - (Px + q) = P e^{(k-1)}$$

$$e^{(k)} = P^k e^{(0)}$$ (per un qualsiasi metodo nel nostro caso $P = G$)

$$e^{(k)} = G^k e^{(0)}$$

$$\|e^{(k)}\|_1 = \|G^k e^{(0)}\|_1 \leq \|G^k\|_1 \|e^{(0)}\|_1 \leq \|G\|_1^k \|e^{(0)}\|_1$$

compatibilità tra norme vett. e matricale indotta

4 prop. iterata $k-1$ volte

se $\|e^{(0)}\|_1 = 0$ cioè $x^{(0)} = x \Rightarrow$

$$0 \leq \|e^{(k)}\|_1 \leq \|G\|^k \cdot 0 \Rightarrow e^{(k)} = 0$$

se $\|e^{(0)}\|_1 > 0 \Rightarrow$ posso dividere

$$\frac{\|e^{(k)}\|_1}{\|e^{(0)}\|_1} \leq \|G\|_1^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 2^{-16}$$

$k \geq 16$

4. b, tol, $nmax$

$x_0 \leftarrow$ nullo

stima dell'errore $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le tol$ o se $k \ge nmax$

errore "vero"

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \le tol \qquad 2^k \ge \frac{1}{tol} \qquad k \ge \left\lceil \log_2 \frac{1}{tol} \right\rceil$$

output $x^{(k+1)}$ e k

costo lineare per iterazione

$$i = 1 \dots n \qquad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \\ -\frac{1}{3} & & \ddots & & -\frac{1}{3} \\ & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i = 3, \dots, n-2$

$$x_i^{(k+1)} = b_i + \frac{1}{3} \cdot x_{i-2}^{(k+1)} + \frac{1}{3} x_{i+2}^{(k)}$$

$$x_1^{(k+1)} = b_1 + \frac{1}{3} x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = b_2 + \frac{1}{3} x_4^{(k)}$$

$\vdots$

$$x_{n-1}^{(k+1)} = b_{n-1} + \frac{1}{3} x_{n-3}^{(k+1)};$$

$$x_n^{(k+1)} = b_n + \frac{1}{3} x_{n-2}^{(k+1)}$$