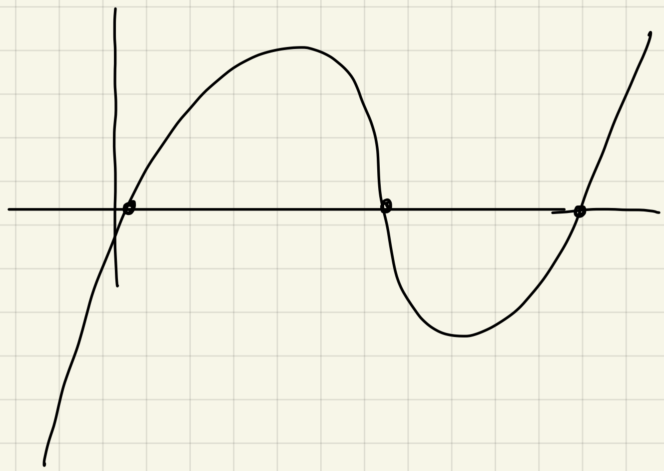
Approssimazione di zeri di funzioni

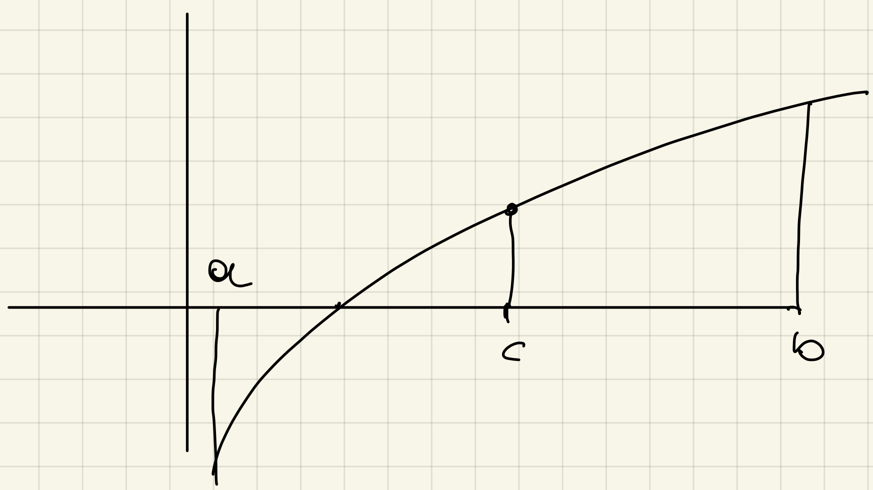
Problema.
$f:[a,b]\to \mathbb{R}$ si cercano le soluzioni $\alpha\in(a,b)$
$f(\alpha)=0$



α è detto <u>zero</u> della funzione e
soluzione dell' equazione $f(x)=0$

$$\frac{b}{a} = b\cdot\left(\frac{1}{a}\right)$$

approssimato con un metodo che prende a e restituisce un'approx di $\frac{1}{a}$



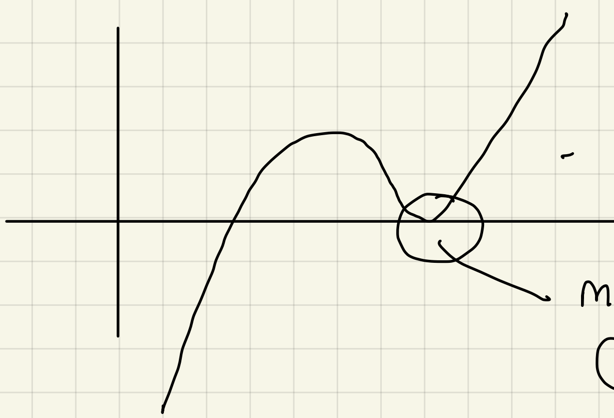
Metodo di bisezione

f è una funzione continua su $[a,b]$ $\left(C^0([a,b]) \right)$

se $f(a)f(b) < 0$ (cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno discorde)

$$c = \frac{a+b}{2}$$

in $[a,b]$ esiste almeno uno zero e se ne esiste più di uno sono in numero dispari (contati con la loro molteplicità)



molteplicità almeno 2 (sempre pari)

Def: Una soluzione α di $f(x)=0$ ha molteplicità r se

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^r} = l \quad \text{finito}$$

se $f \in C^r([a,b])$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) \dots = f^{r-1}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad f^{r}(\alpha) \neq 0$$

es: $f(x) = (x-2)^4$ $\qquad f(2)=0$

$f'(x) = 4(x-2)^3$ $\qquad f'(2)=0$

$f''(x) = 12(x-2)^2$ $\qquad f''(2)=0$

$f'''(x) = 24(x-2)$ $\qquad f'''(2)=0$

$f^{IV}(x) = 24$ $\qquad f^{IV}(2) \neq 0$

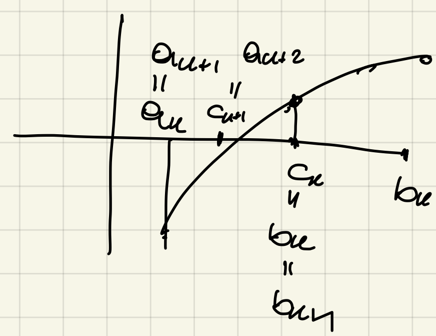
2 ha molteplicità 4

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^4}{(x-2)^4} = 1$$

Def: si dice che α è radice <u>semplice</u> per f se $f(\alpha)=0$ e $f'(\alpha)\neq 0$

Metodo di Bisezione

$a_1 = a \qquad b_1 = b$



for $k \geq 1$

$\quad c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$

$\quad$ if $f(a_k)\, f(c_k) <= 0$

$\qquad a_{k+1} = a_k$

$\qquad b_{k+1} = c_k$

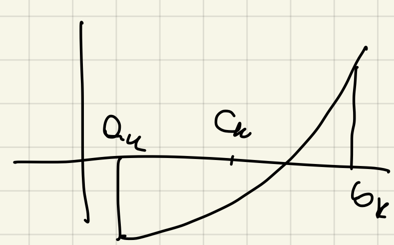
$\quad$ else

$\qquad a_{k+1} = c_k$

$\qquad b_{k+1} = b_k$

$\quad$ end

end



$$\boxed{\alpha = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}}$$

Teorema: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C^0([a,b])$,

e $f(a)f(b)<0$.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k = \alpha$$

dove $f(\alpha)=0$

Dim: a_k è una successione monotona non decrescente
b_k " " " " non crescente

a_k e b_k sono limitate

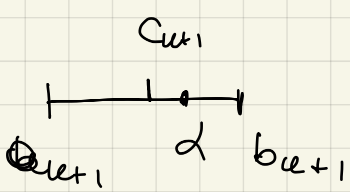
$$0 \le b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \qquad k \geq 1$$

$$f(a_k)\,f(b_k) \le 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_k \to \alpha \\ b_k \to \alpha \end{array}\right\}$$ a_k e b_k hanno limite finito perché monotone e limitate

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)\cdot f(b_k) = \lim f(a_k)\cdot \lim f(b_k) =$$

$$= f(\alpha)^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=0$$



$$|c_{k+1}-\alpha| \le |c_{k+1}-b_{k+1}| = \frac{1}{2}\,\frac{b-a}{2^k}$$

$$err = |c_{k+1}-\alpha| < \varepsilon \qquad \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

$$2^{k+1}\varepsilon > b-a \qquad k+1 > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

esempio: $a=0$, $b=1$ $\qquad f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$\varepsilon = 2^{-16}$$

$$k > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)-1$$

$$k = \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)-1\right\rceil$$

$$k = \log_2\left(\frac{1}{2^{-16}}\right)-1 = 15$$

$$k = \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)-1\right\rceil$$

$$|c_{k+1}-\alpha| < \varepsilon$$

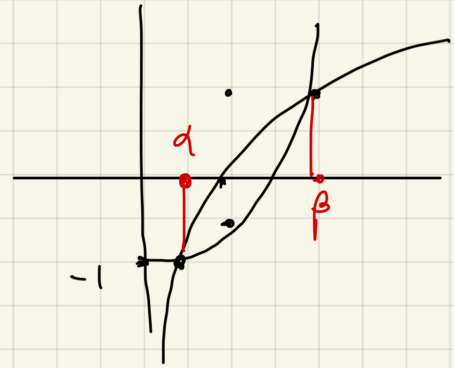
Metodi di iterazione funzionale

$f(x)=0$ può essere riformulata come

. problema di punto fisso, cioè trovo una $g(x)$: le soluzioni di $f(x)=0$ sono anche soluzione di

$$\underline{x = g(x)}$$

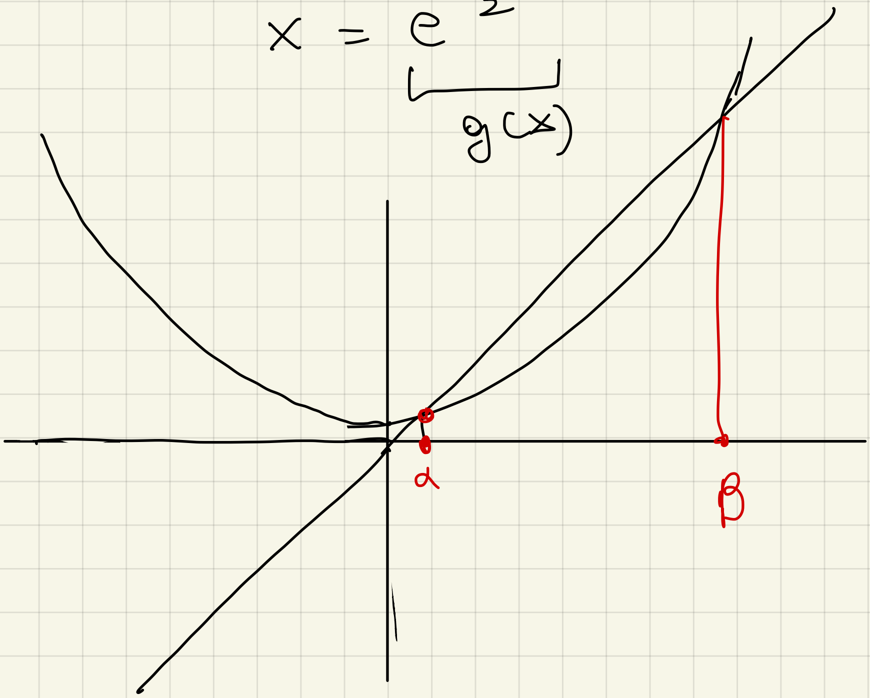
$$f(x) = \log x - \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) = 0$$



$$\log x = \frac{x^2}{2} - 1$$

$$x = \underbrace{e^{\frac{x^2}{2} - 1}}_{g(x)}$$

x



$f(x) = 0$ $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(a)\, f(b) < 0$ $\quad f \in C^0([a,b])$

$f(\alpha) = 0$

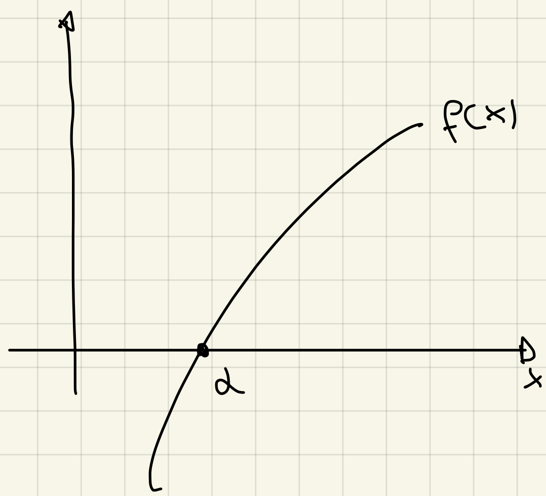
Bisezione $\Rightarrow$ $|\alpha - c_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}} \le \varepsilon$ se

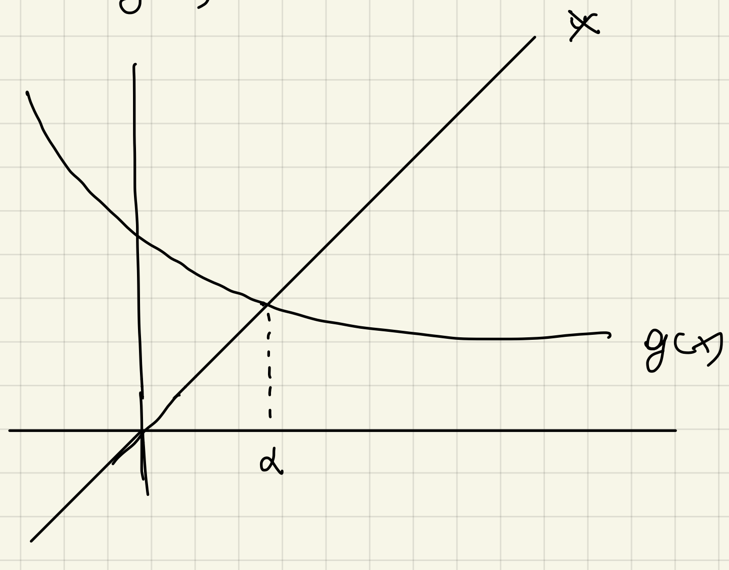
$$k > \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \right\rceil$$

Metodi di punto fisso

$f(x) = 0 \rightsquigarrow x = g(x)$ equivalente cioè

se $\alpha : f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = g(\alpha)$





$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

metodo di punto fisso o di iterazione funzionale

esempio

$f(x) = 0$

$x = \underbrace{x + f(x)}_{g(x)}$ $\qquad x = \underbrace{x + \frac{1}{2} f(x)}_{g(x)}$

È vero che se la successione $x_k \to L$ allora $L = g(L)$ cioè L è punto fisso per g?

Sempre vero basta la continuità di g.

Teorema: se $g \in C^0([a,b])$, $x_k \in [a,b]$ e $x_k \to \alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha = g(\alpha)$ cioè α è punto fisso per g.

Dim

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k) \underset{\text{continuità}}{=} g\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = g(\alpha)$$

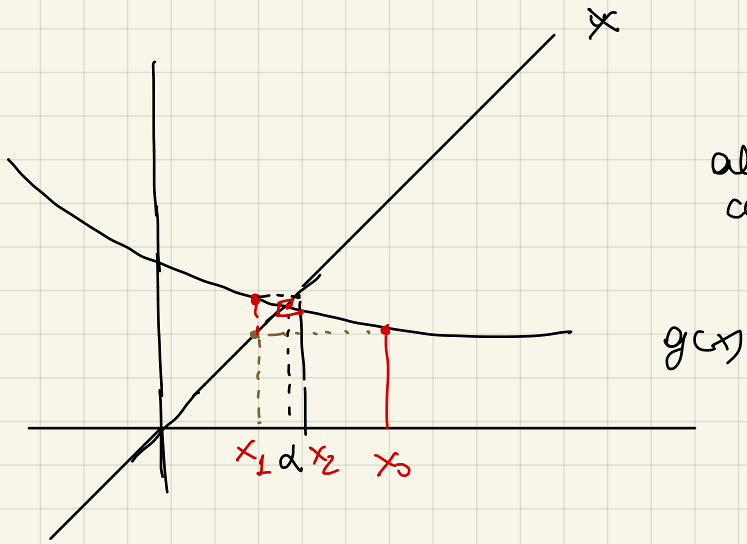
Def: Un metodo

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

è <u>localmente convergente</u> ad $\alpha \in (a,b)$: $\alpha = g(\alpha)$ se <u>esiste</u> un $\rho > 0$: $\forall\ x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] = I_\alpha$

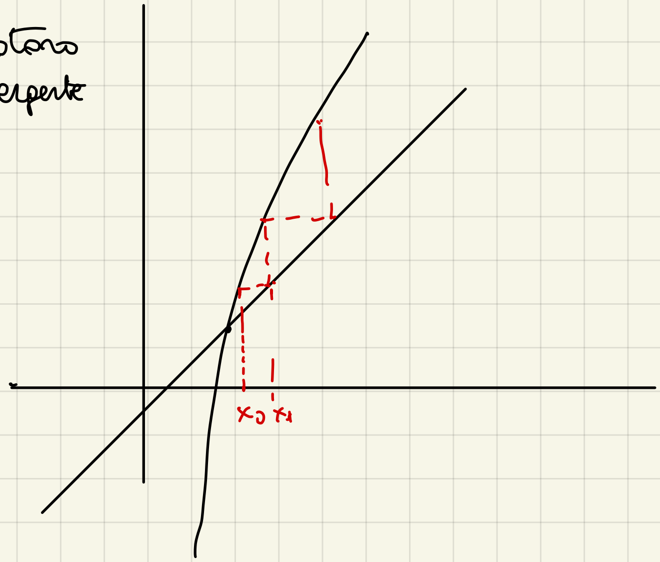
$\alpha-\rho \quad \alpha \quad \alpha+\rho$

1. $x_k \in I_\alpha \quad \forall k \geq 0$
2. $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$

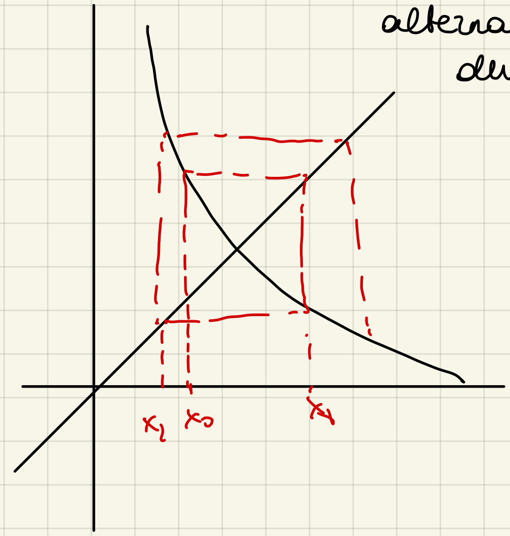


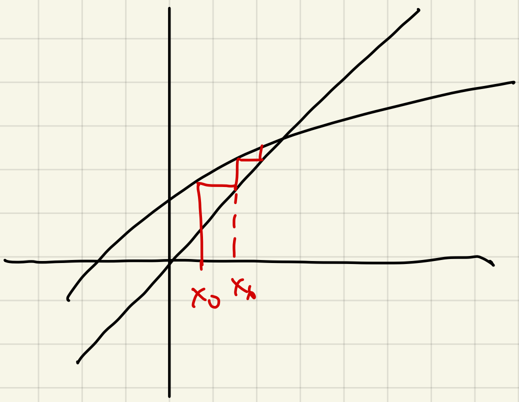
alternata convergente

monotono divergente



alternato divergente





monotono convergente

Teorema del punto fisso:

Sia $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a,b])$, $\alpha = g(\alpha)$, $\alpha \in (a,b)$

se $\exists\, \rho > 0 : \forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] = I_\alpha$ vale

$$|g'(x)| < 1$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in I_\alpha$:

1. $x_k \in I_\alpha$
2. $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$

Dim: Sia $\lambda = \max_{x \in I_\alpha} |g'(x)|$, per ipotesi sappiamo che $\lambda < 1$

Dimostriamo per induzione che vale

$$(*) \quad |x_k - \alpha| \leq \lambda^k \rho \qquad k \geq 0$$

se (*) è vera $\Rightarrow$

1. $x_k \in I_\alpha$ infatti $|x_k - \alpha| \le \lambda^k \rho \le \rho$

2. $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le |x_k - \alpha| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\lambda^k \rho}$ cioè $x_k \to \alpha$

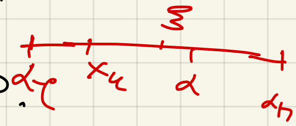
Quindi dimostriamo per induzione *)

$k=0$ $\quad |x_0 - \alpha| \le \lambda^0 \rho = \rho$ per ipotesi $x_0 \in I_\alpha$

assumiamo che il teorema sia vero per k e dimostriamolo per $k+1$

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| \underset{\text{teo di Lagrange}}{=} |g'(\xi)(x_k - \alpha)| = \qquad |\xi - \alpha| \le |x_k - \alpha|$$

$$= |g'(\xi)|\,|x_k - \alpha| \le |g'(\xi)| \cdot \lambda^k \rho \le \lambda^{k+1} \rho$$



poiché $\xi \in I_\alpha \Rightarrow |g'(\xi)| \le \lambda$

Corollario: $g \in C^1([a,b])$ $\quad \alpha \in (a,b)$

se $|g'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ converge localmente

Dim: $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = |g'(x)| - 1$ $\quad h \in C^1([a,b])$

$h(\alpha) < 0$ per il teorema della permanenza del segno $\exists\ \rho > 0 : \forall\ x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ $\quad h(x) < 0$

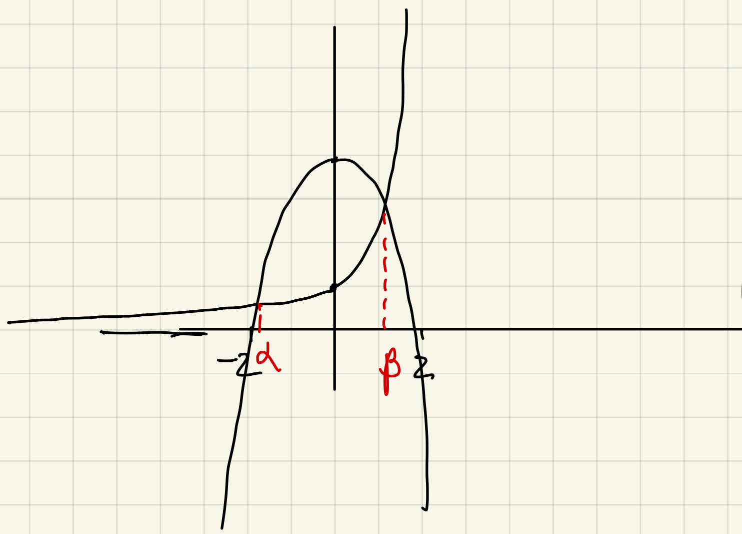
cioè $|g'(x)| < 1$ $\quad \forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ e quindi il metodo è convergente per ogni $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ per il teorema del punto fisso.

Esercizio

$$f(x) = e^x + x^2 - 4$$

1. Si dimostri che la funzione $f(x)=0$ ha due soluzioni reali $\alpha<0$, $\beta>0$ e se ne diano degli intervalli di separazione

$$f(x)=0 \iff e^x = 4-x^2$$



$\alpha \in [-2,-1]$

$f(-2) = e^{-2} + 0 > 0$

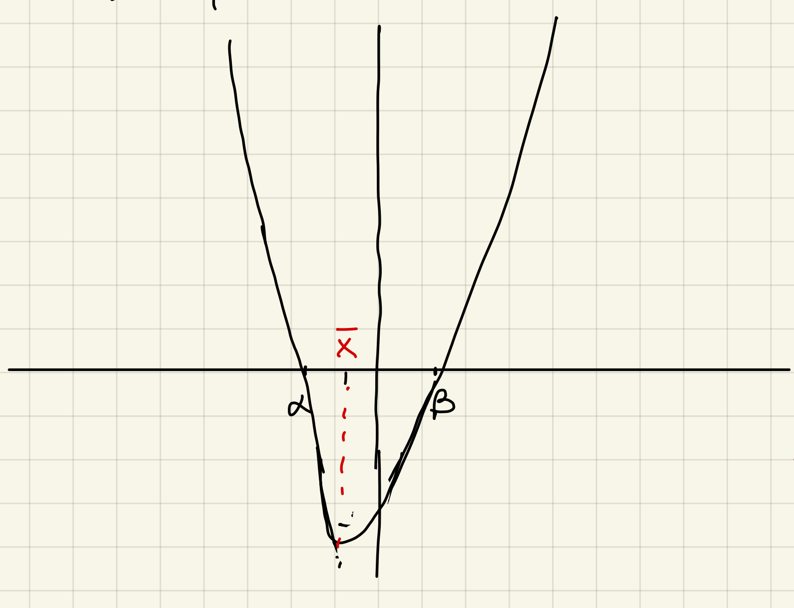
$f(-1) = e^{-1} + 1 - 4 < 0$

$\beta \in [1,2]$

$f(2) = e^2 > 0$

$f(1) = e - 4 + 1 < 0$

$$f(x) = e^x + x^2 - 4$$



$f'(x) = e^x + 2x$

$f''(x) = e^x + 2 > 0$

$f'(\bar{x}) = 0$

3. $\underset{x=g(x)}{\log(4-x^2)}$ equivalente a $f(x)=0$

Studiare la convergenza del metodo $x_{k+1}=g(x_k)$

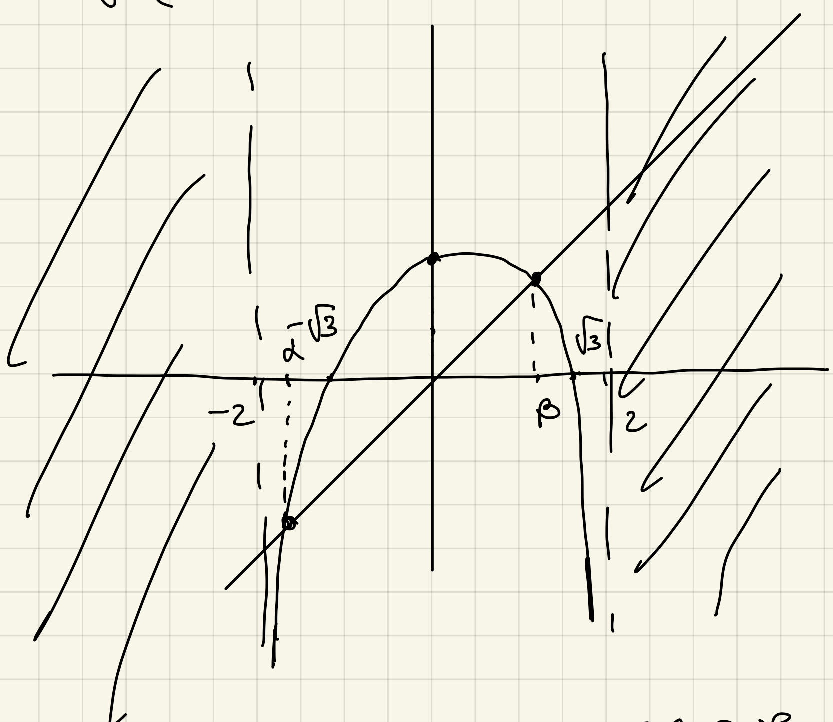
$$e^x+x^2-4=0 \iff e^x=4-x^2 \iff x=\log(4-x^2)$$

equivalente poiché $\alpha,\beta\in[-2,2]$ nel quale è def $g(x)$

$$g'(x)=\frac{1}{4-x^2}(-2x)=\frac{-2x}{4-x^2}$$

N.B. se riesco a dimostrare che per α e β $|g'(\alpha)|>1$ Non ho convergenza locale

$$g(x)=\log(4-x^2)$$



$$\lim_{x\to 2^-} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} g(x)=-\infty$$

$$g(0)=\log(4)=2\log 2$$

$$g'(x)=-\frac{2x}{4-x^2}$$

$$g''(x)=\frac{-2(4-x^2)+2x(-2x)}{(4-x^2)^2}$$

$$=\frac{-8+2x^2-4x^2}{(4-x^2)^2}=$$

$g(x)=0$ se
$\to 4-x^2=1$
$x^2=3 \quad x=\pm\sqrt{3}$

$$g''(x)=\frac{-2x^2-8}{(4-x^2)^2}<0$$

$$g'(\alpha) = \frac{-2\alpha}{\underbrace{4-\alpha^2}_{>0}} > 1 \quad ?$$

$$-2\alpha > 4-\alpha^2 \qquad \alpha^2-2\alpha-4>0$$

$$\Delta = 4+16 = 20 \qquad \alpha = \frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \alpha = 1-\sqrt{5} \\ \alpha = 1+\sqrt{5} \end{cases}$$

se $\alpha < 1-\sqrt{5}$

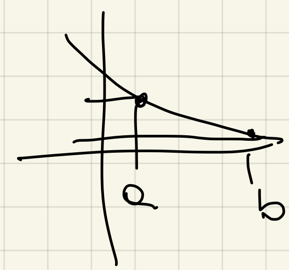
$\downarrow$

non sappiamo se $\alpha < 1-\sqrt{5}$

$\underbrace{\alpha > 1+\sqrt{5}}$ non ci interessa

Non si può dire per il valore di separazione che abbiamo dato

OSS $\quad g''(x) < 0 \Rightarrow g'$ decrescente



$$g'(x) = \frac{-2x}{(4-x^2)} \qquad \alpha \in [-2,-1]$$

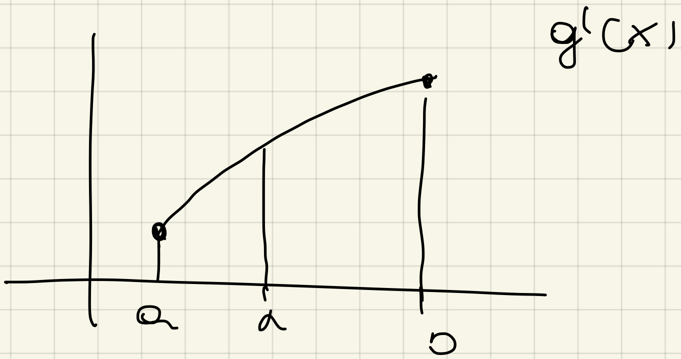
$$g'(-1) < g'(\alpha) < g'(-2)$$

$$\frac{2}{3} < g'(\alpha) < \infty$$ non abbiamo risolto niente

Supponiamo che $\alpha \in [-2, -\sqrt{3}]$

$$g'(-\sqrt{3}) = \frac{+2\sqrt{3}}{1} > 1$$

Attenzione ~~per~~ se $\alpha \in [a,b]$ posso valutare $g'(\alpha)$ confrontandolo con $g(a)$ e $g'(b)$ solo se g' è monotona su $[a,b]$



g'(x)
a
d
b

$x = g(x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f(x) = 0$

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

$g(\alpha) = \alpha$, $g \in C^1([a,b])$ con $\alpha \in (a,b)$

se $\exists\, \rho :$ $\forall x \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ $\quad |g'(x)| < 1$

$\Rightarrow$ $x_0 \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho] = I_\alpha$

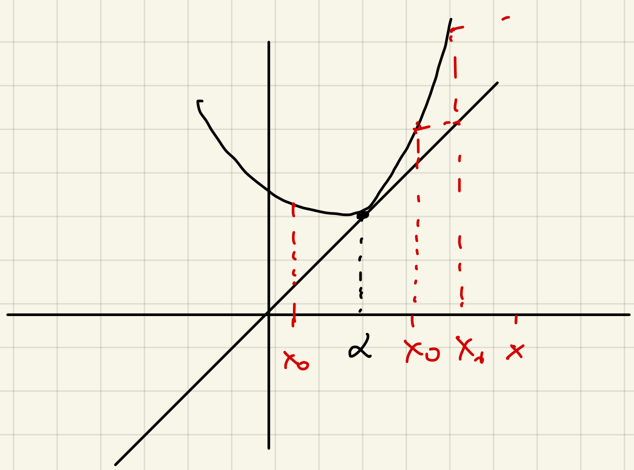
$x_k \in I_\alpha$

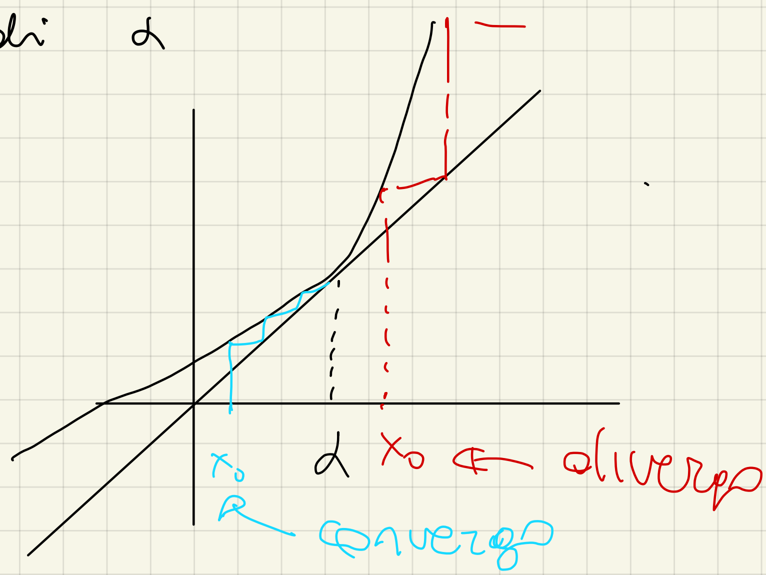
$\lim x_k = \alpha$

- se $g \in C^1([a,b])$ $\Rightarrow$ ho convergenza se $|g'(\alpha)| < 1$

- se $|g'(\alpha)| > 1$ non ho convergenza locale

$|g'(\alpha)| = 1$ va indagato meglio vedendo cosa succede in un intorno di α





Ordine di convergenza (metodi iterativi con ordine di convergenza più alto convergono più velocemente)

Def: $\{x_k\} \to \alpha$, $\alpha = g(\alpha)$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^{p}} = \underline{\underline{\ell}} \neq 0 \qquad \begin{cases} 0<\ell\le 1 & \text{se } p=1 \\ \ell>0 & \text{se } p>1 \end{cases}$$

allora <u>la successione ha ordine di convergenza</u> p

$p=1$ convergenza lineare ($\ell=1$ sublineare)

$p>1$ convergenza superlineare ($p=2$ quadratica)

se $p=1$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = |g'(\alpha)|$$

se $g'(\alpha)=0 \Rightarrow$ convergenza superlineare

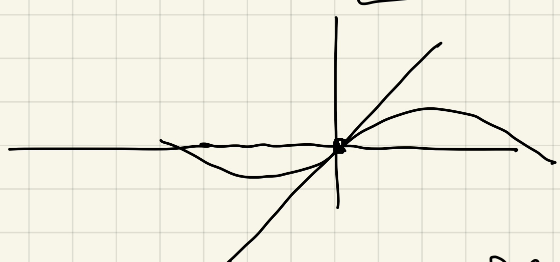
se $|g'(\alpha)|=1 \Rightarrow$ convergenza sublineare (convergenza molto lenta)

↳ es: $x = \underbrace{\sin x}$

$g(x) = \sin x$

$g'(x) = \cos x$

$g'(0) = 1$



Teorema: sia $g \in C^p([a,b])$, $\alpha \in (a,b)$

se $p \geq 2$ e

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{p-1}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad g^{p}(\alpha) \neq 0$$

$\Rightarrow$ il metodo ha ordine p. → cioè tutte le successioni in un intorno hanno ordine p.

es: $g(x) = \sqrt[3]{|x|^5}$ $\qquad x = g(x)$ $\qquad \alpha = 0$

$x_{k+1} = g(x_k)$ ha ordine $5/3$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - 0|}{|x_k - 0|^{5/3}} = \rho \neq 0$$

$$= \frac{\sqrt[3]{|x_k|^5}}{|x_k|^{5/3}} = 1$$

$$\lim \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \rho \neq 0$$

$\exists \, \bar{k} : \quad \forall \, k > \bar{k}$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \rho \, \underbrace{|x_k - \alpha|}^{p} =$$

$$|x_0 - \alpha| < 10^{-1}$$

$$|x_1 - \alpha| < \rho \cdot 10^{-p}$$

$$|x_2 - \alpha| < \rho \cdot |x_1 - \alpha|^p < \rho \, \rho^p \, |x_0 - \alpha|^{2p}$$

Criteri d' arresto

$$|g(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| < tol$$

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < tol \qquad\qquad |f(x_k)| < tol$$

se mi arresto perché

$$|x_{k+1} - x_k| < tol \quad \text{allora} \quad |x_k - \alpha| < tol \; ?$$

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - \alpha + \alpha - x_k| =$$

$$= |g(x_k) - g(\alpha) - (x_k - \alpha)| =$$

$$= |g'(\eta_k)(x_k - \alpha) - (x_k - \alpha)| =$$

Lagrange

$$|\eta_k - \alpha| \le |x_k - \alpha|$$

$$= |(g'(\eta_k) - 1)| \, |x_k - \alpha| \le tol$$

errore

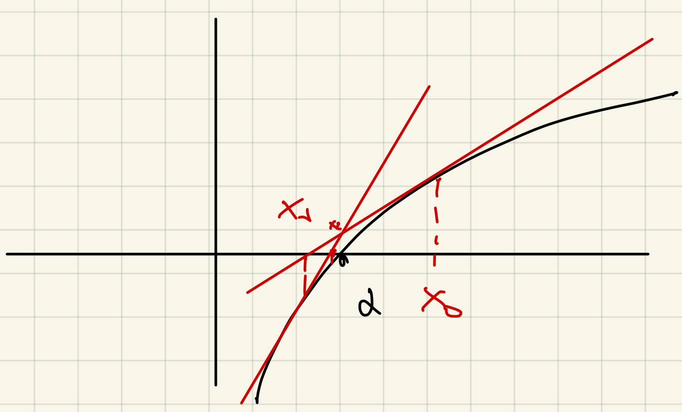
$$|x_k - \alpha| \le \frac{tol}{|g'(\eta_k) - 1|} \quad \text{se } g'(\alpha) \approx 1$$

il metodo si arresta ma sono ancora lontano dalla soluzione

Metodo di Newton o delle tangenti

$f \in C^1([a,b])$

$f(x) = 0$



retta che passa $(x_0, f(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$

$$y = f'(x_0)\,x + \underline{\underline{q}}$$

$$f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + q \Rightarrow q = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

$$y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Metodo delle tangenti

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{g(x_k)} \qquad f'(x_k) \neq 0$$

Teorema di convergenza locale

Sia $f \in C^2([a,b])$, $\alpha : f(\alpha) = 0$, $\alpha \in (a,b)$

Se $f'(\alpha) \neq 0$ (radice semplice) $\Rightarrow$

① il m.d.T converge localmente cioè

$$\left[\begin{array}{l} \exists \rho>0 : \quad \forall x_0 \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho], \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ \quad 1. \quad x_k \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho] \\ \quad 2. \quad \lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha \end{array}\right.$$

② L'ordine di convergenza è almeno 2.

Dim: ① Uso il corollario del teorema del punto fisso $|g'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ ho locale convergenza.

Poiché $f'(\alpha) \neq 0$ il teo della permanenza del segno mi assicura che esiste un $r>0$:

$$\forall x \in [\alpha - r, \alpha + r] = I \quad f'(x) \neq 0$$

$$g: I \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g \in C^1(I)$$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0$ quindi ho conv. locale per il Teo del punto fisso

(2) sviluppiamo con Taylor nel punto x_k $f(x)$

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + f''(\eta_x)\frac{(x-x_k)^2}{2}$$

$$|\eta_x - x_k| \leq |x - x_k|$$

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + f''(\eta_\alpha)\frac{(\alpha - x_k)^2}{2}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \ell \neq \text{finito}}$$

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

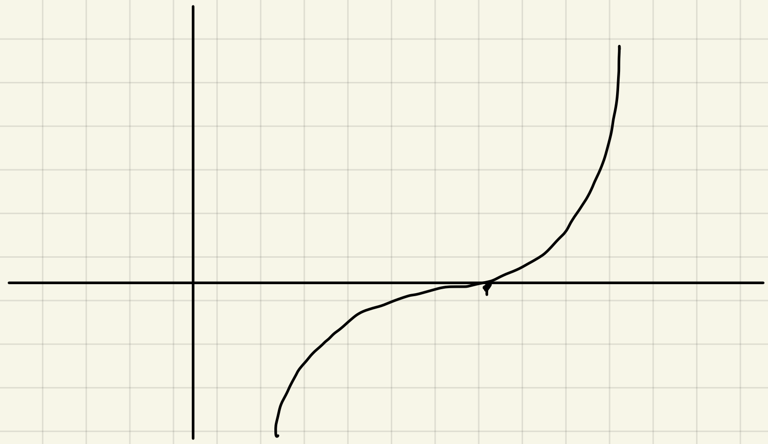
dividendo per $f'(x_k)$ otteniamo:

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\alpha - x_k) + \frac{f''(\eta_\alpha)}{f'(x_k)}\frac{(\alpha - x_k)^2}{2}$$

$$\underbrace{x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1} - \alpha} = \frac{f''(\eta_\alpha)}{2f'(x_k)}(x_k - \alpha)^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\eta_\alpha)|}{|2f'(x_k)|} = \frac{|f''(\alpha)|}{|2f'(\alpha)|}$$

se $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ il m.d T ha ordine 2
se $f''(\alpha) = 0 \Rightarrow$ il m d T ha ordine maggiore di 2

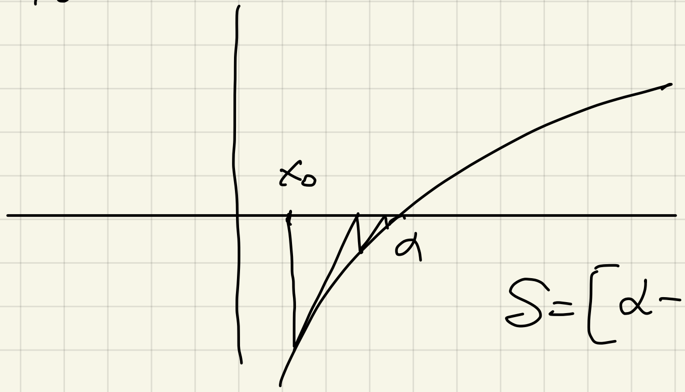


Teorema di convergenza in largo

Sia $f \in C^2([a,b])$, $\alpha : f(\alpha)=0 \quad \alpha \in (a,b)$.
Se $\exists\ \delta > 0 : \quad \forall x \in S = [\alpha, \alpha+\delta] \subset [a,b]$ si ha
(oppure $[\alpha-\delta, \alpha]$)
1. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$
2. $f(x) f''(x) > 0 \qquad \forall x \in S \setminus \{\alpha\}$

$\Rightarrow$ il m d T converge $\forall x_0 \in S$ e le succ. generate sono monotone

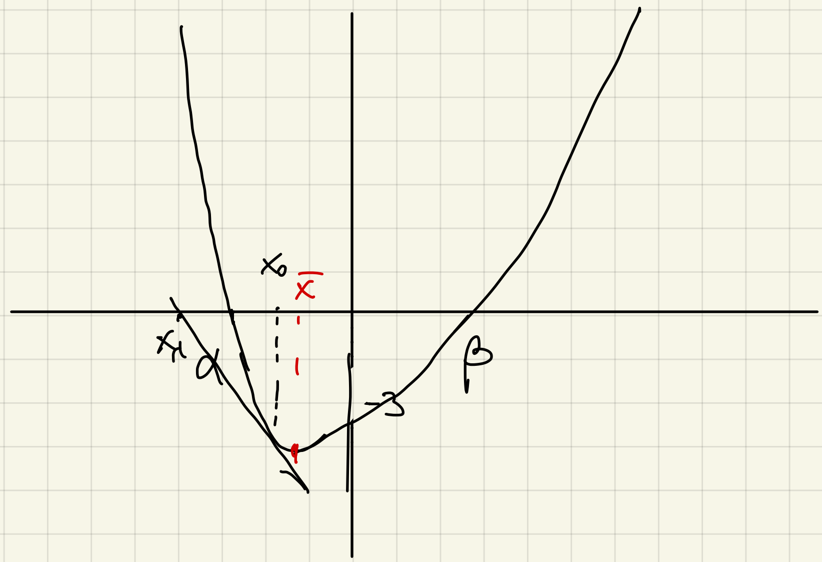
$\alpha \leq x_{k+1} \leq x_k$



$S = [\alpha-\delta, \alpha]$

esempio

$$f(x) = e^x + x^2 - 4$$

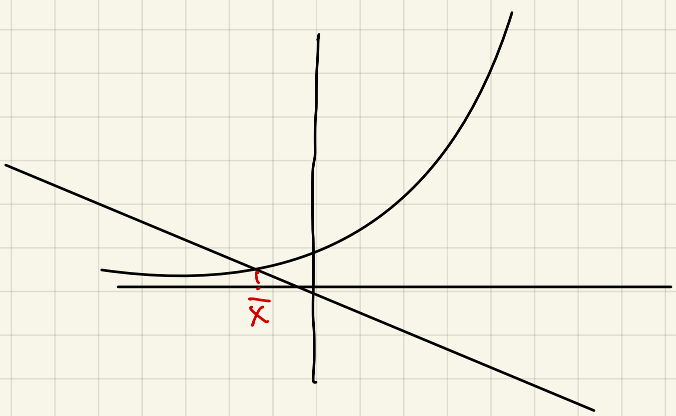


$\alpha \in [-2, -1]$

$\beta \in [1, 2]$

Il m.d.T converge localmente? con quale ordine?

$$f'(x) = e^x + 2x = 0 \qquad e^x = -2x$$



quindi poiché $f'(\alpha) \neq 0$ e $f'(\beta) \neq 0 \Rightarrow \alpha$ e β sono radici semplici e ho garantita la convergenza locale. L'ordine è almeno 2.

$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall x \Rightarrow$ l'ordine è esattamente 2.

Studiamo la convergenza in largo.

$S = (-\infty, \alpha]$ se $x_0 \in S \Rightarrow \{x_n\} \to \alpha$ in modo monotono crescente

$R = [\beta, +\infty)$ se $x_0 \in R \Rightarrow \{x_n\} \to \beta$ in modo monotono decrescente

se $x_0 \in (\alpha, \bar{x}) \Rightarrow x_1 \in S$ e ho convergenza ad α

se $x_0 \in (\bar{x}, \beta) \Rightarrow x_1 \in R$ e ho conv. a β

Il metodo converge $\forall x_0 \neq \bar{x}$, se $x_0 < \bar{x}$ convergo ad α se $x_0 > \bar{x}$ convergo a β.

esempio: $f(x) = x - e^{-x}$

studiare la convergenza del MdT

(1) quante e dove sono le radici di $f(x)=0$

(2) c'è convergenza locale?

Esercizio 1. Si consideri l'equzione $f(x) = 0$ con $f(x) = \log^2(x) - x - 1$.

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione α e se ne dia un intervallo di separazione.
2. Si dica quale è il più grande valore b tale che il metodo delle tangenti risulta convergente per ogni $0 < x_0 < b$.
3. Si scriva una function MATLAB che dato in input $x_0 \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo delle tangenti arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| < 1.0e-14$. La funzione deve restituire la coppia x_k, k. Si riportino i valori ottenuti a partire dal punto iniziale $x_0 = 1/2$.

$$\log^2 x - x - 1 = 0 \iff \log^2 x = x + 1$$

$$\boxed{x > 0}$$

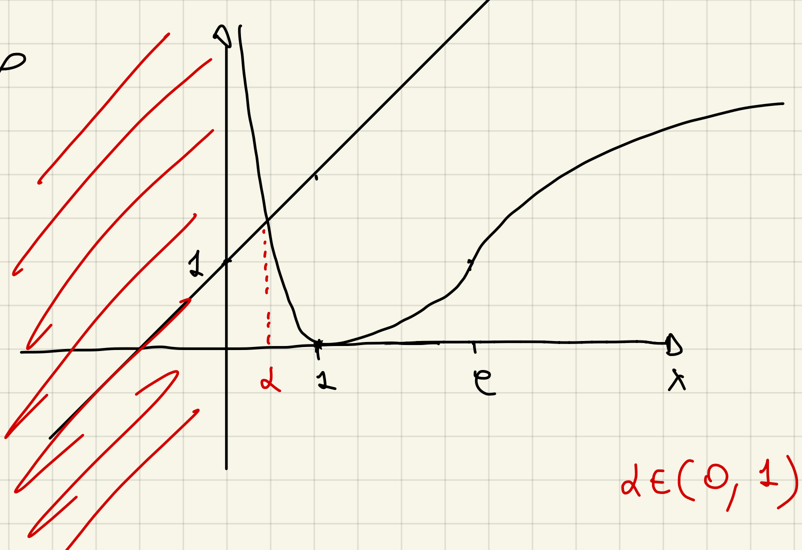
$$\lim_{x \to 0^+} \log^2 x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log^2 x = +\infty$$

$$d(\log^2 x) = \frac{2}{x} \log x$$

$$d^2(\log^2 x) \; -\frac{2}{x^2} \log x + \frac{2}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{x^2}(1 - \log x) = 0$$

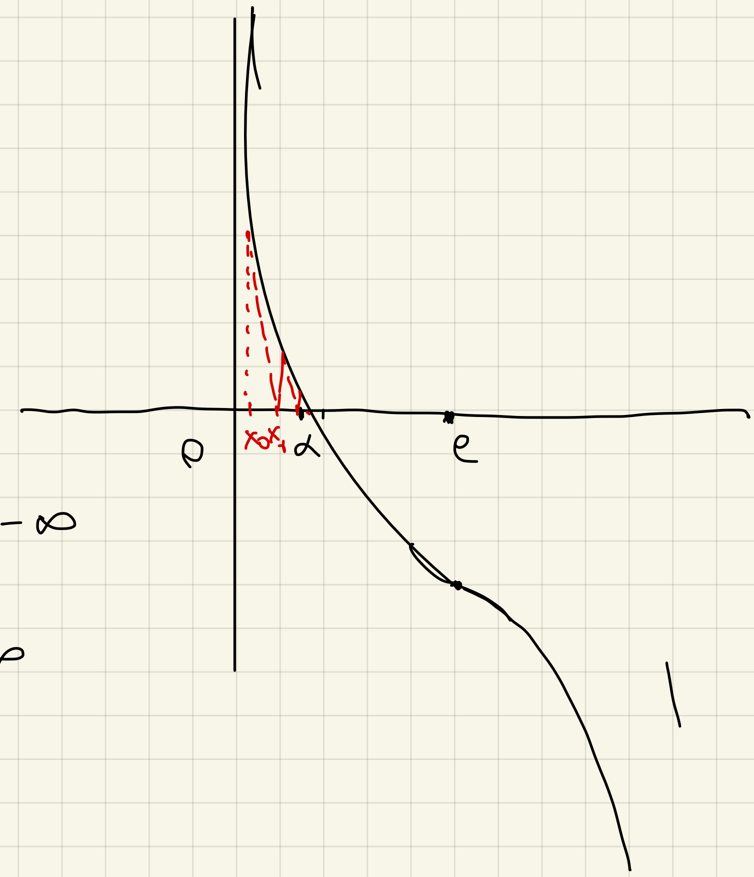


$\alpha \in (0, 1)$

$f(x) = \log^2 x - x - 1$

$f'(x) = \frac{2}{x}\log x - 1$

$f''(x) = \frac{2}{x^2}(1 - \log x)$



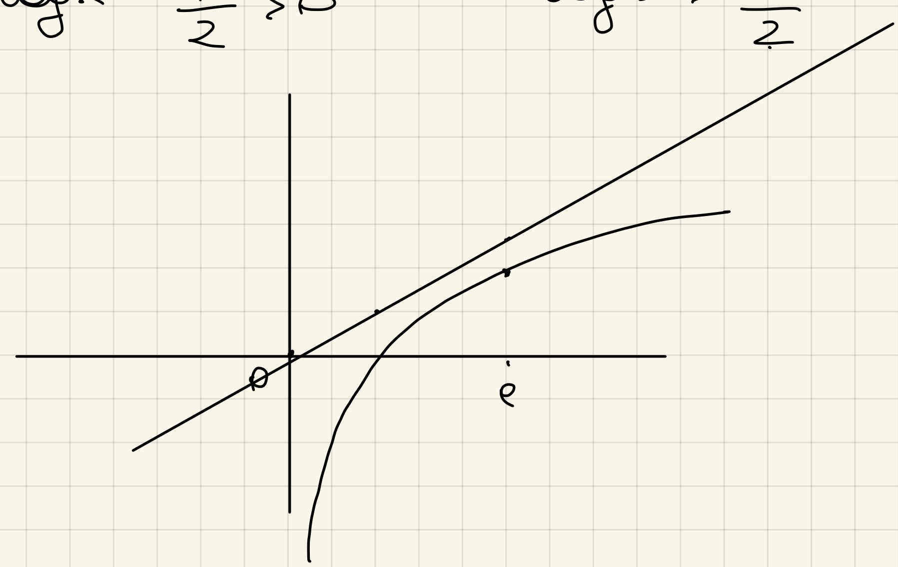
$\lim_{x \to +\infty} \log^2 x - x - 1 = -\infty$

$\lim_{x \to 0} \log^2 x - x - 1 = +\infty$

$f(e) = \cancel{1} - e - \cancel{1} \le 0$

$\frac{2}{x}\log x - 1 > 0$ $\quad \frac{2\log x - x}{x} > 0$ perché $x > 0$ sempre

$\log x - \frac{x}{2} > 0$ $\quad \log x > \frac{x}{2}$ MAI



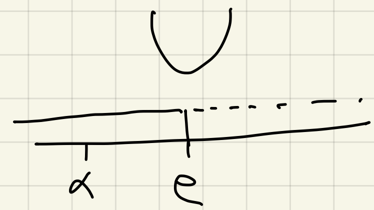
① Convergenza locale:

è garantita se α è radice semplice ovvero

$f'(\alpha)\neq 0$ vero perché $f'(x)\neq 0$ $\forall x$.

$$\alpha\in(0,1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}\log x - 1$$



$f'(\alpha)\neq 0$ radice semplice

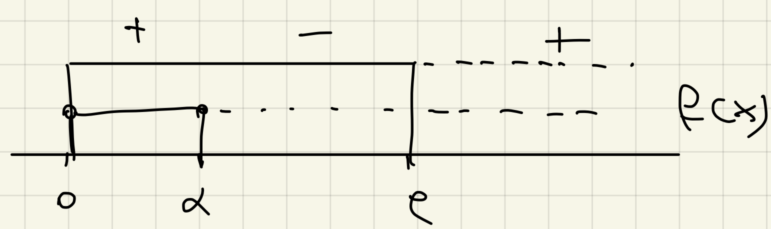
$\Rightarrow$ il m.d.T. converge localmente.

② Convergenza in largo

$f\in C^2$ scelgo un $S=[\alpha,\alpha+\rho]$ o $[\alpha-\rho,\alpha]$

$\Rightarrow$ ① $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in S\setminus\{\alpha\}$

② $f(x)f''(x) > 0$ $\forall x\in S\setminus\{\alpha\}$



$$S_\rho = [\alpha-\rho,\alpha]\subset(0,\alpha] \quad \forall\, 0<\rho<\alpha.$$

$\forall x_0\in S_\rho$ $\Rightarrow$ ho convergenza monotona crescente ad α

Ordine di convergenza è 2 perché $f'(\alpha)\neq 0$ (cioè radice semplice e ordine ≥ 2) e $f''(\alpha)\neq 0$

$\Rightarrow$ ordine esattamente 2.

Si noti che anche con $x_0 > \alpha$ posso avere convergenza se $x_1 \in (0, \alpha)$. Il valore b è determinato come il valore "limite" per cui

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$0 = x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b - \frac{\log^2 b - b - 1}{\frac{2}{b}\log b - 1}$$

$$b\left(\frac{2}{b}\log b - 1\right) - \log^2 b + b + 1 = 0$$

$$2\log b - \cancel{b} - \log^2 b + \cancel{b} + 1 = 0$$

$$\log^2 b - 2\log b - 1 = 0 \iff y^2 - 2y - 1 = 0 \text{ con } y = \log b$$

esempio $x_0 = e$

$$x_1 = e - \frac{-e}{\left(\frac{2}{e} - 1\right)} = e - \frac{-e^2}{(2-e)} =$$

$$= \frac{2e - \cancel{e^2} + \cancel{e^2}}{2 - e} = \frac{2e}{2-e} < 0$$

quindi $b < e$

$x_k =$

function tangenti (f, f1, x0, tol)

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$|x_{k+1} - x_k| \le tol$

f = @(x) (log(x)).^2 - x - 1

fplot(f, [0, 5])

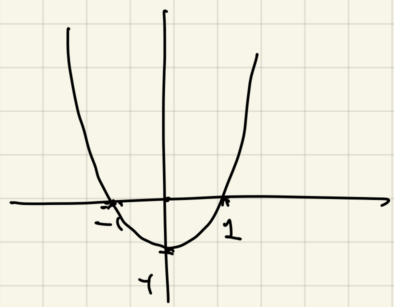
f1 = @(x) (2 * log(x))./ x - 1

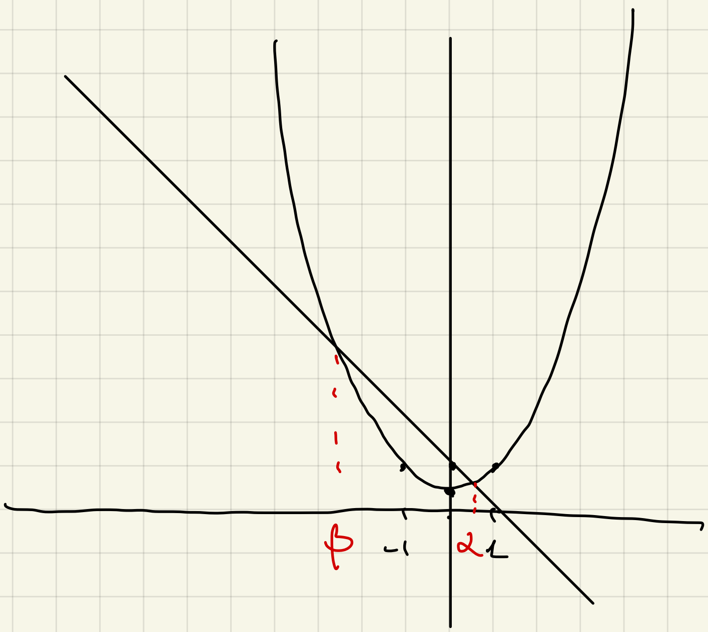
Esercizio 1 Si consideri l'equazione

$$\boxed{f(x) = e^{x^2-1} + x - 1 = 0.}$$

1. Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione e se ne diano gli intervalli di separazione.
2. Si mostri che l'equazione $f'(x) = 0$ ha una sola soluzione reale denotata con $\bar{x}$.
3. Si dimostri che $\forall x_0 \neq \bar{x}$ la successione generata dal metodo delle tangenti applicato per la risoluzione di $f(x) = 0$ con punto iniziale x_0 è convergente.
4. Si studi la convergenza del metodo di punto fisso $x = g(x)$ con $g(x) = 1 - e^{x^2-1}$.
5. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $tol \in \mathbb{R}$ e x_0 genera la successione generata dal metodo delle tangenti a partire da x_0 arrestandosi quando $|x_k - x_{k-1}| \leq tol$ e restituendo in uscita la coppia (x_k, k).
6. Utilizzando la funzione al punto precedente con $tol = 1.0e-8$ determinare approssimazioni delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$.

$$e^{x^2-1} = 1 - x$$





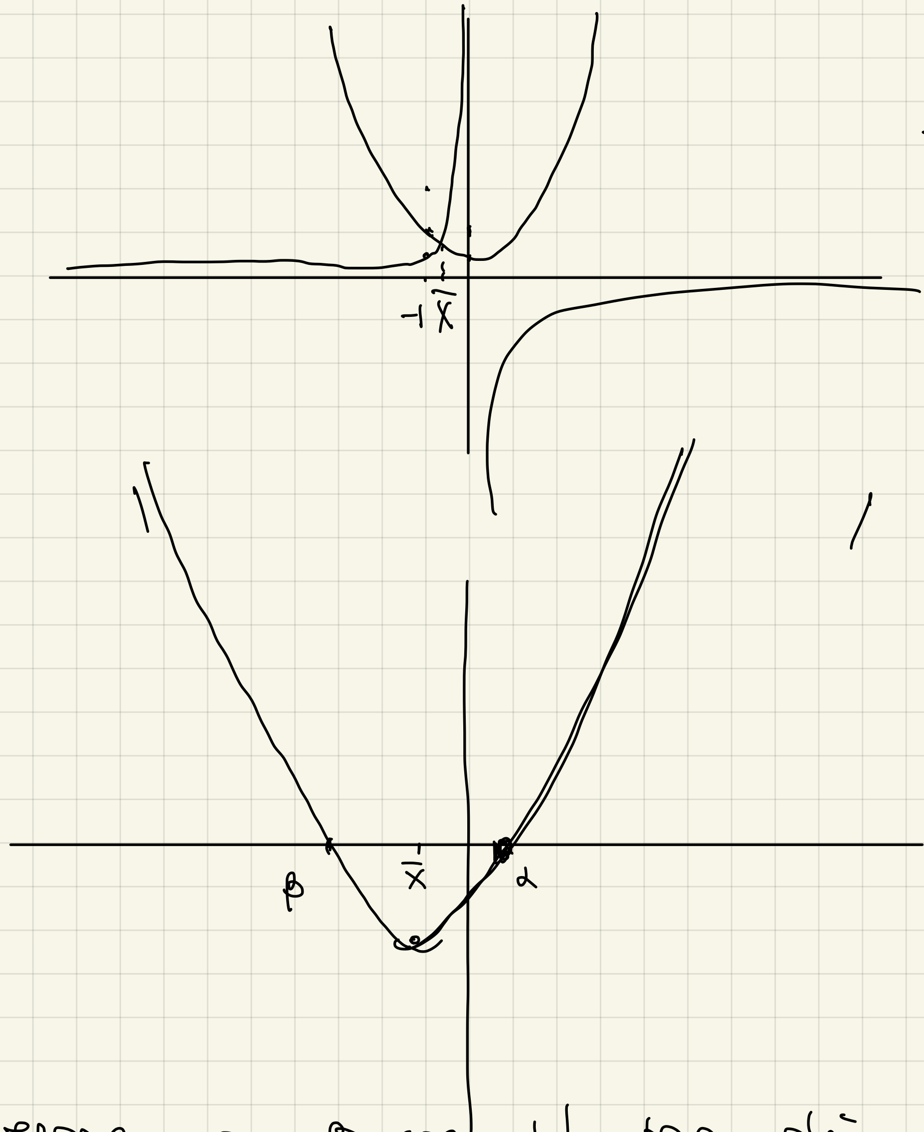
$0 < \alpha < 1$

$$f(x) = e^{x^2-1} + x - 1 \qquad f'(x) = e^{x^2-1}(2x) + 1$$

$$2x\, e^{x^2-1} + 1 = 0 \iff e^{x^2-1} = -\frac{1}{2x}$$

$x = 0$ non è soluzione

$$-1 < \bar{x} < 0$$



$$e^{x^2-1} + x - 1$$

$$f'(x) = 2x e^{x^2-1} + 1$$

$$f''(x) = 2e^{x^2-1} + (2x)^2 e^{x^2-1} = 2e^{x^2-1}(1+2x^2)$$

Convergenza a β con il teo di convergenza in largo

$S_\beta = (-\infty, \beta]$ $\quad \forall x_0 \in S$ convergo a β in modo monotono crescente

conv. ad α

$S_\alpha = [\alpha, \infty]$ $\quad \forall x_0 \in S$ convergo ad α in modo monotono decrescente

In realtà ho conv a β $\forall x_0 < \bar{x}$ perché
se $x_0 \in (\beta, \bar{x}) \Rightarrow x_1 < \beta$, cioè $x_1 \in S_\beta$

se $x_0 \in (\bar{x}, \alpha) \Rightarrow x_1 > \alpha$ cioè $x_1 \in S_\alpha$

$$x_0 \in (\bar{x}, \alpha)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > \alpha$$

$$x_1 > \alpha$$