Esercizio: Sia $c \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & c \\ -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & c \\ & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad Ax = b$$

Si discuta, al variare del parametro c la convergenza del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $n \geq 2$, con la seguente struttura

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline \alpha I_n & I_n \end{array}\right],$$

con α parametro reale e I_n matrice identità di dimensione n.

1. Si dica per quali valori del parametro α la matrice è a predominanza diagonale.

2. * Si dica per quali valori del parametro α la matrice è fattorizzabile LU e nel caso se ne determinino i due fattori triangolari.

3. Si dica per quali valori del parametro α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente

4. Si dimostri che la matrice di iterazione del metodo di Jacobi è tale per cui $J^2 = \alpha^2 I_{2n}$. Sfruttando tal;e relazione si dica per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente.

5. Si scriva una funzione Matlab che implementa un passo del metodo di Gauss-Seidel. La funzione prende in ingresso il parametro α, il vettore b e l'iterazione x_{old} restituendo l'iterazione successiva x_{new}. La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice con la seguente struttura

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & 1 \\ & \alpha & 1 & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha & 1 \\ \alpha & 1+\alpha & \cdots & 1+\alpha & \alpha \end{bmatrix},$$

dove gli elementi che non sono specificati vanno intesi sempre uguali a zero.

1. Si dica per quali valori del parametro α la matrice è fattorizzabile LU e si trovino i due fattori triangolari. Esistono valori di α per cui la matrice è singolare?

2. Per $\alpha = -1$ si consideri il metodo basato sulla decomposizione additiva dove M è la matrice triangolare superiore di A, cioè $M = \text{triu}(\text{A})$ ed $N = M - A$. Si scriva la matrice di iterazione $P = M^{-1}N$ e si studi la convergenza del metodo iterativo ottenuto.

3. Si scriva una funzione Matlab `function x = metodo_iter_step(x0, b)` che implementa un passo del metodo precedente $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + M^{-1}b$, a partire da un vettore $x^{(0)}$ passato come parametro. La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.

Esercizio 2. Sia A una matrice di dimensioni $2n \times 2n$ definita come

$$a_{ij} = \begin{cases} -2 & \text{se } i = j, i = 1, 2, \ldots, 2n \\ 1 & \text{se } i = 1, j = 2n \text{ oppure se } i = 2n \text{ e } j = 1 \\ k & \text{se } i = n, j = n+1 \text{ oppure se } i = n+1, j = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si individuino dei valori del parametro reale k per cui A ha autovalori reali negativi.

2. Si costruisca la matrice di iterazione del metodo Jacobi J e si usi la matrice J^2 per studiare la convergenza del metodo di Jacobi.

3. * Si dimostri che il metodo di Gauss può essere applicato per ogni valore di k e utilizzando la fattorizzazione LU si calcoli il determinate di A. Esistono valori di k per cui la matrice è singolare?

4. Si scriva una funzione Matlab `function y=mat_prod(k, b)` che restituisce il vettore $y = Ab$. La funzione deve avere costo lineare e non richiedere la memorizzazione di A.