1. Trova autovalori e autovettori delle seguenti matrici in $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Per ognuna, verifica che il determinante è uguale al prodotto degli autovalori e la traccia è uguale alla loro somma (contati con la loro molteplicità algebrica in entrambi i casi). Quali di queste matrici sono diagonalizzabili (su $\mathbb{R}$)?

2. Trova autovalori e autovettori delle seguenti matrici in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ($n = 2$ oppure 3).

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Trova autovalori e autovettori di $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Verifica che $C = VDV^{-1}$, dove $V$ è la matrice degli autovettori e $D$ è la matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale.

4. Quali sono autovalori e autovettori di $C^2$? Di $C + 4I$? Di $C^{-1}$? (Non ricominciare da capo come se fosse una matrice nuova; c'è un modo più furbo di trovarli; riesci a vederlo?)

5. Mostra che il polinomio caratteristico di $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è $p(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$.

6. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ questa matrice è diagonalizzabile?

7. Per quali valori di $a$ la matrice $A$ qui sopra ha come autovalore $\frac{1}{2}$?

8. Per quali valori di $a$ la matrice $A$ qui sopra ha come autovettore $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

9. Sia $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. Quanto vale $\lim_{k \to \infty} A^k v$? (Suggerimento: trova autovalori e autovettori di $A$).

10. Sia $A$ una matrice $2 \times 2$ tale che $A^2 = A$. Quali possono essere gli autovalori di $A$? Trova esplicitamente esempi in cui $A$ ha tutti i possibili autovalori.

## Soluzioni

1. $A_1$ $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (e suoi multipli diversi da 0 – questo vale per tutti gli autovettori che troveremo,non serve stare a dirlo), $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $A_2$ $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 2$, $v_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   $A_3$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Gli unici autovettori sono i multipli (non nulli) di $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   $A_4$ $\lambda_1 = 3$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; gli autovettori relativi a 0 sono tutti quelli della forma $\{\begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli$\}$.

   $A_1$, $A_2$, $A_4$ sono diagonalizzabili, $A_3$ no. Una base di autovettori per $A_4$, per esempio, è $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $B_1$ $\lambda_1 = 1 + i$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} + 3i$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 0$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $B_2$ $\lambda_1 = 2 + i$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2 - i$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

2. $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 4$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. $C^2$ corrisponde ad applicare due volte la matrice $C$, quindi i suoi autovalori sono i quadrati di quelli di $C$, cioè $1, 4, 16$, e i suoi autovettori sono gli stessi. $C + 4I$ corrisponde a moltiplicare un vettore per $C$ e poi aggiungervi 4 volte sé stesso, quindi i suoi autovalori sono quelli di $C$, più quattro, cioè $5, 6, 8$. Difatti che $(C + 4I)v_i = (\lambda_i + 4)v_i$. Possono esserci altri autovalori? No, perché un polinomio di grado 3 ha al più tre radici distinte. Similmente, $C^{-1}$ ha autovalori gli inversi di quelli di $C$. Possono esserci altri autovettori? No, perché non è possibile trovare più di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. (oppure, in alternativa, puoi usare la fattorizzazione $C = VDV^{-1}$ per ricavare $C^2 = VD^2V^{-1}$, $C + 4I = V(D + 4I)V^{-1}$ e $C^{-1} = VD^{-1}V^{-1}$).

4. Basta calcolare $\det(M - \lambda I)$ con uno dei metodi che abbiamo visto.

5. $p_A(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & a \\ -a & -1-x \end{bmatrix} = (1-x)(-1-x) + a^2 = x^2 - 1 + a^2$, che ha soluzioni $x = \pm(1 - a^2)$. Se $|a| < 1$, allora $A$ ha due autovalori reali distinti ed è diagonalizzabile. Se $|a| > 1$, $A$ ha due autovalori complessi distinti ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (ma non su $\mathbb{R}$). Se $a = 1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, che ha due autovalori pari a 0 ma un solo autovettore, e non è diagonalizzabile. Se $a = -1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, che di nuovo non è diagonalizzabile.

6. Basta calcolare $\det(M - \lambda I)$ con uno dei metodi che abbiamo visto.

7. Vogliamo che $\det \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & a \\ -a & -1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$, che uccede per $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Vogliamo che $\begin{bmatrix} 1-\lambda & a \\ -a & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, ma non conosciamo $\lambda$ (né $a$). Espandendo il prodotto, abbiamo

$$\begin{bmatrix} 2 - 2\lambda + a \\ -2a - 1 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che sono due equazioni nelle incognite $a$ e $\lambda$. Viene $a = -\frac{4}{5}, \lambda = \frac{3}{5}$.

9. $A$ ha autovettori $v_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ con autovalore $\lambda_1 = 1$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ con autovalore $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Abbiamo $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = v_1 - 0.2 v_2$. Allora $A^k v 1^k v_1 + (-0.2)^k v_2$, il cui limite è proprio $v_1$.

10. Sia $Av = \lambda v$ una coppia autovalore-autovettore. Dev'essere $\lambda v = Av = A^2 v = \lambda^2 v$. Ma allora $\lambda = \lambda^2$, quindi $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$. Entrambi i valori sono possibili (es: $A = I$, $A = 0$).