

Esercizio

Si consideri l'equazione

$$x^3 + 3x - 5 = 0$$

Si considerano i seguenti metodi di punto fisso

- $x_{k+1} = g_1(x_k)$ con $g_1(x) = \frac{5-x^3}{3}$
- $x_{k+1} = g_2(x_k)$ con $g_2(x) = \sqrt{\frac{5}{x}} - 3$
- $x_{k+1} = g_3(x_k)$ con $g_3(x) = x - \frac{x^3 + 3x - 5}{3x^2 + 3}$

1. Si determinino il numero di soluzioni reali dell'equazione

2. Si investighi sperimentalmente la convergenza delle successioni di punto fisso generate dai tre metodi a partire da $x_0 = 1.5$.

Le funzioni possono essere dichiarate in matlab ad esempio per g_1 :

$$g1 = @(x) (5 - x^3) / 3$$

3. Si studi la convergenza locale dei tre metodi.

4. Con il comando Matlab `fzero` si determini un'approssimazione delle soluzioni.

Si utilizzino queste approssimazioni per valutare l'errore delle sequenze generate (per i metodi localmente convergenti).

Esercizio 1. Si consideri l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos(x) - 1$.

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione α e se ne dia un intervallo di separazione.
2. Si mostri che il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $g(x) = \frac{1}{2} \cos(x) + 1$, $k \geq 0$, genera successioni convergenti ad α per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Si scriva una function Matlab che dato in input $x_0 \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-12}$. La funzione deve restituire la coppia x_k, k . Si riportino i valori ottenuti a partire dal punto iniziale $x_0 = 0$ e $x_0 = \pi/2$.

Esercizio 2. È data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{(3x^2 + 3)^{1/3}}.$$

- (a) Si dica quali sono le soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$ e se ne indichi la molteplicità.
- (c*) Sia $\Phi_m(x) = x - f(x)/m$ con $m \in \mathbb{R}$. Si studi al variare del parametro m la convergenza del metodo di punto fisso $x_{k+1} = \Phi_m(x_k)$ (convergenza locale ed ordine di convergenza) a ciascuno dei punti fissi.
- (d) Si scriva una funzione Matlab `function [xk, k] = fixpoint(m, x0, tol)` che presi in ingresso il parametro m , il punto iniziale x_0 e una tolleranza tol esegue iterazioni di punto fisso fintanto che $|x_{k+1} - x_k| < tol$ o se sono state effettuate più di 30 iterazioni. La funzione deve restituire l'approssimazione x_k e il valore k .