SIMULAZIONE COMPITINO 2025

Esercizio 1. Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definita da

$$A_n = I_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_n^T + \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{x}^T,$$

dove I_n è la matrice identità di ordine n, $\boldsymbol{e}_n$ è la sua colonna $n-$esima e $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_{n-1}, 0] \in \mathbb{R}^n$.

1. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A_n è convergente se $\| \boldsymbol{x} \|_1 < 1$.
2. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A_n è convergente se e sole se $\| \boldsymbol{x} \|_2 < 1$.
3. Si mostri che vale $\| \boldsymbol{x} \|_2 \leq \| \boldsymbol{x} \|_1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si mostri che non vale $\| \boldsymbol{x} \|_1 \leq \| \boldsymbol{x} \|_2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. Si scriva una function MatLab che dati in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ restituisce il vettore $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ generato da un'iterazione del metodo di Gauss-Seidel con punto iniziale $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ applicato per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

Esercizio 2 È data la funzione

$$f(x) = x^2 - \cos(x).$$

(a) Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$.

(b) Si studi la convergenza (compresa scelta del punto iniziale e ordine di convergenza) del metodo delle tangenti per l'approssimazione delle soluzioni.

(c) Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

alle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.