

Calcolo Numerico

Foglio di esercizi su metodi iterativi per equazioni non lineari

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Aprile 2023

Esercizio 1. È data la funzione

$$f(x) = \log(x) + 2x - 1$$

- (a) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale α .
- (b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alla soluzione di $f(x) = 0$.
- c) Sia $g(x) = f(1/x)$. Si dimostri che l'equazione $g(x) = 0$ ha come soluzione $1/\alpha$, e si dimostri che il metodo delle tangenti applicato a $g(x)$ risulta convergente per ogni $x_0 \in (0, 1/\alpha]$.
- (d) Scrivere una funzione Matlab `function [x, k]=tangenti(x0,tol)` che implementa il metodo delle tangenti applicato alla risoluzione dell'equazione $g(x) = 0$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| \leq tol$.
- (e) Per $x_0 = 1$ e $tol = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-12}$ si riporti il numero di iterazioni eseguite. Si faccia la stessa prova a partire da $x_0 = e$ e si dica, motivando la risposta, se la convergenza può essere dimostrata per via teorica.
- (f) Per $x_0 = e^2, tol = 10^{-4}$ si giustifichino dal punto di vista teorico i risultati sperimentali.

Esercizio 2. Sia $g(x) \in C^1[a, b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \in [a, b]$. Si assuma inoltre che $1/3 \leq g'(x) \leq 1/2$ per ogni $x \in [a, b]$.

- (a) Si dimostri che per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione definita da $x_{i+1} = g(x_i)$, per $i \geq 0, i \in \mathbb{N}$ risulta monotona convergente ad α . In particolare che la successione risulta monotona crescente se $x_0 < \alpha$ e monotona decrescente se $x_0 > \alpha$.

(b) Si determini il valore di k per cui, per ogni $x_0 \in [a, b]$ si ha $|x_k - \alpha| \leq |b - a|10^{-6}$.

Esercizio 3. Sia $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$, con $a > 0$.

(a) Si verifichi che \sqrt{a} è punto fisso di $g(x)$.

(b) Si dica se il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ risulta convergente al punto fisso.

Esercizio 4. È data la funzione

$$f(x) = e^{-x} - 2x^2$$

(a) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni e se ne diano gli intervalli di separazione.

(b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni.

(c) Si dica se l'equazione $x = g(x)$ con

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2x}$$

è equivalente e se ne studi la convergenza locale.